

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ЕКОНОМІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

**О.І. Лютий, О.І. Макаренко**

---

# **Збірник задач з вищої математики**

---

**Навчальний посібник**

*Рекомендовано  
Міністерством освіти і науки України*

**ББК 22.1я73**  
**Л 96**

*Рецензенти*

**Я. Ф. Каюк**, д-р фіз.-мат. наук, проф.,  
**Д. Я. Хусайнов**, д-р фіз.-мат. наук, проф.  
(Київський національний університет ім. Тараса Шевченка)

*Гриф надано Міністерством освіти і науки України*  
*Лист № 14/18.2-1966 від 28.10.2002*

**Лютий О. І., Макаренко О. І.**

Л 96      Збірник задач з вищої математики: Навч. посібник. — К.:  
КНЕУ, 2003. — 305 с.  
ISBN 966–574–532–8

Збірник містить повний об'єм задач, що відповідають програмі з вищої математики для бакалаврів з економіки. У задачнику виділені задачі та тестові завдання для підготовки до практичних занять, розв'язавши які, студент може самостійно зробити висновок про якість своєї підготовки.

Рекомендується для студентів економічних спеціальностей, викладачів, фахівців економічного профілю та усіх, хто бажає самостійно вивчати курс вищої математики.

**ББК 22.1я73**

*Розповсюджувати та тиражувати*  
*без офіційного дозволу КНЕУ заборонено*

**ISBN 966–574–532–8**

© О. І. Лютий, О. І. Макаренко, 2003  
© КНЕУ, 2003

*Навчальне видання*

**ЛЮТИЙ Олександр Іванович  
МАКАРЕНКО Олександр Іванович**

# **ЗБІРНИК ЗАДАЧ З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ**

**Навчальний посібник**

Редактор *М. Ястреб*  
Художник *О. Стеценко*  
Технічний редактор *Т. Піхота*  
Коректор *А. Бородавко*  
Верстка *І. Пантюхової*

Підп. до друку 11.08.03. Формат 60×84/16. Папір офсет.  
Гарнітура Тип Таймс. Друк офсет. Ум. друк. арк. 17,90.  
Обл.-вид. арк. 20,02. Наклад 4000 прим. Зам. № 01-2516

Київський національний економічний університет  
03680, м. Київ, проспект Перемоги, 54/1

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру  
суб'єктів видавничої справи (серія ДК, №235 від 07.11.2000)

Тел./факс: (044) 458–00–66; 456–64–58  
E-mail: [publish@kneu.kiev.ua](mailto:publish@kneu.kiev.ua)

## Анотація

Збірник містить повний об'єм задач, що відповідають програмі з вищої математики для бакалаврів з економіки. У задачнику виділені задачі та тестові завдання для підготовки до практичних занять, розв'язавши які, студент може самостійно зробити висновок про якість своєї підготовки.

Рекомендується для студентів економічних спеціальностей, викладачів, фахівців економічного профілю та усім, хто бажає самостійно вивчати курс вищої математики.

Видання «Збірника задач з вищої математики» зумовлено потребою єдиного збірника задач, який би охоплював програму з вищої математики для студентів економічних спеціальностей.

Традиційно при вивченні вищої математики в КНЕУ використовувалось кілька збірників задач, бо жоден із них взятий окремо не охоплював весь програмний курс математики для економістів. Крім того, ці збірники містять багато позапрограмного матеріалу, оскільки всі вони розраховані для вищих технічних учбових закладів.

Метою авторів було написання зручного в користуванні для студентів економічного профілю збірника задач з вищої математики, який би охоплював всю програму і допоміг би закласти відповідний фундамент математичної підготовки студентів для подальшого вивчення сучасних економічних дисциплін, таких як статистика, мікро- і макроекономіка, математичне моделювання, моніторинг економічних процесів та ін.

За своєю структурою «Збірник задач з вищої математики» відповідає послідовності вивчення відповідних розділів курсу вищої математики для економістів у КНЕУ згідно з програмою з вищої математики.

Спрямування студентів на самостійне вивчення дисципліни спонукало авторів дещо відступити від традиційної побудови збірника задач. На початку кожного параграфа, якщо це необхідно, розміщено коротко відповідний теоретичний матеріал, а також дано розв'язання деяких типових прикладів з методичними вказівками. Початкові завдання у кожному параграфі — це, як правило, теоретичні питання тестового характеру.

Відповідаючи на них, студент теоретично готується до занять, запам'ятовує основні формули і теореми і може переходити до розв'язування наступних завдань.

На початку розділу, що відповідає певній темі, дано перелік завдань для самостійної підготовки, а також рекомендовані для аудиторних та домашніх завдань задачі, що складають необхідний мінімум задач для опрацювання певної теми. Дано також перелік додаткових завдань, якими можна скористатись як для поглибленого вивчення даної теми, так і для підготовки студента до контролюючих заходів: контрольних робіт, заліку, екзамену.

Така структура збірника дасть змогу студентам самостійно оцінити свій рівень знань, підготуватися до виконання практичних завдань, набуті необхідних навичок і вмінь у процесі розв'язання конкретних прикладів.

Автори, де це доцільно, включили до збірника задачі, пов'язані з застосуванням математики в економіці. Це задачі на побудову та інтерпретацію графіків функцій, такі, що потребують обчислення граничних величин та еластичності, розв'язання пов'язаних з балансовими моделями в економіці систем рівнянь тощо.

---

### 1.1. Визначники

Нагадаємо, що визначники другого і третього порядку можна обчислити за формулами:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21};$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \left( + \begin{vmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{vmatrix} \right) =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Для обчислення визначників вищого порядку застосовують теорему Лапласа про розклад визначника  $n$ -го порядку за елементами рядка або стовпчика. Визначники з числовими елементами, використовуючи їх властивості, перетворюють так, щоб обернулися на нуль всі, крім одного, елементи деякого рядка або стовпчика. Розкладаючи потім визначник за елементами цього рядка або стовпчика, зводимо задачу обчислення визначника  $n$ -го порядку до знаходження одного визначника  $(n - 1)$ -го порядку.

**Приклад 1.** Знайти визначники другого порядку:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = 5 \cdot 3 - 7 \cdot 2 = 1;$$

$$\text{б) } \begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix} = (a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab;$$

$$b) \begin{vmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha \\ \sin \beta & \cos \beta \end{vmatrix} = \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha = \sin(\alpha - \beta);$$

$$r) \begin{vmatrix} 1 & \log_b a \\ \log_a b & 1 \end{vmatrix} = 1 - \log_b a \log_a b = 0.$$

**Приклад 2.** Знайти визначники третього порядку:

$$a) \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot 3 + 5 \cdot 4 \cdot 3 + 1 \cdot 1 \cdot 2 - 3 \cdot 3 \cdot 1 - 2 \cdot 2 \cdot 4 - 5 \cdot 1 \cdot 3 = 40;$$

$$b) \begin{vmatrix} a & x & x \\ x & b & x \\ x & x & c \end{vmatrix} = abc + x^3 + x^3 - bx^2 - ax^2 - cx^2 = \\ = 2x^3 - (a + b + c)x^2 + abc;$$

$$b) \begin{vmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha & 1 \\ \sin \beta & \cos \beta & 1 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 1 \end{vmatrix} = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \gamma + \sin \gamma \cos \alpha - \sin \gamma \cos \beta - \\ - \sin \alpha \cos \gamma - \sin \beta \cos \alpha = \sin(\alpha - \beta) + \sin(\beta - \gamma) + \sin(\gamma - \alpha).$$

**Приклад 3.** Обчислити визначник четвертого порядку:

$$\begin{vmatrix} 3 & -3 & -5 & 8 \\ 2 & 5 & 4 & 6 \\ 5 & 5 & 8 & 7 \\ 4 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -3 & -5 & 8 \\ 2 & 5 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -6 & -14 & 5 \\ 2 & 3 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -7 & 2 \end{vmatrix} = \\ = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -6 & -14 & 5 \\ 3 & -2 & 4 \\ 0 & -7 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -14 & 5 \\ 7 & -2 & 4 \\ 2 & -7 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -14 & 5 \\ 0 & -100 & 39 \\ 0 & -35 & 12 \end{vmatrix} = \\ = (-1)^{1+1} \cdot (-1) \begin{vmatrix} -100 & 39 \\ -35 & 12 \end{vmatrix} = -165.$$

Для утворення нулів у рядку або стовпчику зручно мати розв'язувальний елемент, що дорівнює одиниці. Даний визначник такого елемента не має. Для його утворення можна, наприклад, помножити

останній рядок визначника на  $-1$  і додати до передостаннього, при цьому визначник не зміниться. У такий спосіб у третьому рядку утворилися три одиниці (достатньо мати одну). Для утворення нулів, наприклад у третьому рядку, можна взяти за розв'язувальний елемент одиницю, що стоїть на перетині першого стовпчика і третього рядка.

Помножимо елементи першого стовпчика спочатку на  $-1$  і складемо з відповідними елементами другого стовпчика, тоді на місці елемента  $(3, 2)$  утвориться нуль. Далі множимо всі елементи того ж першого стовпчика на  $-3$  і складаємо з елементами третього стовпчика. На місці елемента  $(3, 3)$  знову утворився нуль. У такий же спосіб, помноживши перший стовпчик на  $-1$  і склавши з останнім, на місці елемента  $(3, 4)$  також утвориться нуль. Слід зазначити, що для утворення нулів у рядку працюють з елементами стовпчиків, а для утворення нулів у стовпчиках — з елементами рядків.

Далі, використовуючи теорему Лапласа, розкладаємо визначник 4-го порядку за елементами третього рядка і одержуємо визначник третього порядку. Для його знаходження можна застосувати відповідне правило, але ми ще раз утворимо нулі.

Для одержання одиниці до елементів першого стовпчика додамо відповідні елементи третього стовпчика. На місці елемента  $(1, 1)$  утворилася  $-1$ . Далі помножимо елементи першого рядка на  $7$  і складемо з відповідними елементами другого рядка, одержимо нуль на місці елемента  $(2, 1)$ . Аналогічно, помноживши елементи першого рядка на  $2$  і склавши з елементами третього рядка, одержимо нуль на місці елемента  $(3, 1)$ . Після застосування теореми Лапласа одержуємо визначник другого порядку і остаточний результат.

**Завдання** (для підготовки до практичних занять: 1—9, 15, 21—27, 33; для аудиторських занять: 11, 16, 20, 38, 40, 46; домашні: 10, 12, 17, 19, 34, 39, 41, 47; додаткові: 13, 14, 18, 28—32, 35—37, 42—45, 48).

### *Закінchte вирази:*

1. Визначник другого порядку обчислюється за формулою ...
2. Визначник третього порядку обчислюється за формулою ...
3. Мінором  $k$ -го порядку називається ...
4. Алгебраїчним доповненням називається ...
5. Визначник дорівнює нулю, якщо ...
6. Для того щоб помножити визначник на число, треба ...
7. Визначник не зміниться, якщо ...
8. Визначник  $n$ -го порядку дорівнює ...

*Обчислити визначники:*

9.  $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 8 & 5 \end{vmatrix}.$

10.  $\begin{vmatrix} 6 & 9 \\ 8 & 12 \end{vmatrix}.$

11.  $\begin{vmatrix} n+1 & n \\ n & n-1 \end{vmatrix}.$

12.  $\begin{vmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix}.$

13.  $\begin{vmatrix} 2 \sin \varphi \cos \varphi & 2 \sin^2 \varphi - 1 \\ 2 \cos^2 \varphi - 1 & 2 \sin \varphi \cos \varphi \end{vmatrix}.$

14.  $\begin{vmatrix} \frac{1-t^2}{1+t^2} & \frac{2t}{1+t^2} \\ -2t & \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{vmatrix}.$

15.  $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}.$

16.  $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}.$

17.  $\begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}.$

18.  $\begin{vmatrix} 5 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 7 & 4 & 5 \end{vmatrix}.$

19.  $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}.$

20.  $\begin{vmatrix} a+x & x & x \\ x & b+x & x \\ x & x & c+x \end{vmatrix}.$

*Шляхом безпосереднього обчислення за правилом трикутника довести такі властивості визначників третього порядку:*

21. Якщо транспонувати визначник 3-го порядку, то він не зміниться.

22. Якщо елементи якого-небудь рядка або стовпчика визначника рівні нулю, то і визначник дорівнює нулю.

23. Якщо всі елементи якого-небудь рядка або стовпчика помножити на деяке число, то і весь визначник помножиться на це число.

24. Якщо поміняти місцями два рядки або стовпчики визначника, то він змінить знак.

25. Якщо два рядки або стовпчики визначника рівні між собою або пропорційні, то він дорівнює нулю.

**26.** Якщо кожен елемент деякого рядка або стовпчика визначника можна подати у вигляді суми двох доданків, то початковий визначник дорівнює сумі двох визначників, у яких всі рядки, крім розглядуваного, такі як у початкового, при цьому розглядуваний рядок першого визначника складається з перших доданків, а в другому визначнику в розглядуваному рядку стоять другі доданки (те саме справджується і для стовпчиків).

**27.** Якщо до елементів одного з рядків визначника додати відповідні елементи іншого рядка, попередньо помножені на деяке число, то визначник при цьому не зміниться (те саме справджується і для стовпчиків).

*Використовуючи властивості, розглянуті в задачах 21—27, обчислити визначники:*

$$28. \begin{vmatrix} \sin^2 \alpha & 1 & \cos^2 \alpha \\ \sin^2 \beta & 1 & \cos^2 \beta \\ \sin^2 \gamma & 1 & \cos^2 \gamma \end{vmatrix}.$$

$$29. \begin{vmatrix} x & x_1 & ax + bx_1 \\ y & y_1 & ay + by_1 \\ z & z_1 & az + bz_1 \end{vmatrix}.$$

$$30. \begin{vmatrix} a+b & c & 1 \\ b+c & a & 1 \\ c+a & b & 1 \end{vmatrix}.$$

$$31. \begin{vmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha & \sin(\alpha + \delta) \\ \sin \beta & \cos \beta & \sin(\beta + \delta) \\ \sin \gamma & \cos \gamma & \sin(\gamma + \delta) \end{vmatrix}.$$

$$32. \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \beta & \gamma & \alpha \\ \gamma & \alpha & \beta \end{vmatrix}, \text{ де } \alpha, \beta, \gamma \text{ — корені рівняння } x^3 + px + q = 0.$$

**33.** Розкладаючи за третім рядком, обчислити визначник:

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ a & b & c & d \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}.$$

**34.** Розкладаючи за другим стовпчиком, обчислити визначник:

$$\begin{vmatrix} 5 & a & 2 & -1 \\ 4 & b & 4 & -3 \\ 2 & c & 3 & -2 \\ 4 & d & 5 & -4 \end{vmatrix}.$$

Обчислити визначники:

$$35. \begin{vmatrix} a & 3 & 0 & 5 \\ 0 & b & 0 & 2 \\ 1 & 2 & c & 3 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix}. \quad 36. \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & a \\ 2 & 0 & b & 0 \\ 3 & c & 4 & 5 \\ d & 0 & 5 & 0 \end{vmatrix}. \quad 37. \begin{vmatrix} x & a & b & 0 & c \\ 0 & y & 0 & 0 & d \\ 0 & e & z & 0 & f \\ g & h & k & u & m \\ 0 & 0 & 0 & 0 & v \end{vmatrix}.$$

Обчислити визначники з числовими елементами, утворюючи нулі в рядках або стовпчиках:

$$38. \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}. \quad 39. \begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}. \quad 40. \begin{vmatrix} -3 & 9 & 3 & 6 \\ -5 & 8 & 2 & 7 \\ 4 & -5 & -3 & -2 \\ 7 & -8 & -4 & -5 \end{vmatrix}.$$

$$41. \begin{vmatrix} 3 & -5 & -2 & 2 \\ -4 & 7 & 4 & 4 \\ 4 & -9 & -3 & 7 \\ 2 & -6 & -3 & 2 \end{vmatrix}. \quad 42. \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 9 & -8 & 5 & 10 \\ 5 & -8 & 5 & 8 \\ 6 & -5 & 4 & 7 \end{vmatrix}.$$

$$43. \begin{vmatrix} 35 & 59 & 71 & 52 \\ 42 & 70 & 77 & 54 \\ 43 & 68 & 72 & 52 \\ 29 & 49 & 65 & 50 \end{vmatrix}. \quad 44. \begin{vmatrix} 27 & 44 & 40 & 55 \\ 20 & 64 & 21 & 40 \\ 13 & -20 & -13 & 24 \\ 46 & 45 & -55 & 84 \end{vmatrix}.$$

$$45. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 7 & 10 & 13 \\ 3 & 5 & 11 & 16 & 21 \\ 2 & -7 & 7 & 7 & 2 \\ 1 & 4 & 5 & 3 & 10 \end{vmatrix}. \quad 46. \begin{vmatrix} 3 & 6 & 5 & 6 & 4 \\ 5 & 9 & 7 & 8 & 6 \\ 6 & 12 & 13 & 9 & 7 \\ 4 & 6 & 6 & 5 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & 5 & 3 \end{vmatrix}.$$

$$47. \begin{vmatrix} 24 & 11 & 13 & 17 & 19 \\ 51 & 13 & 32 & 40 & 46 \\ 61 & 11 & 14 & 50 & 58 \\ 62 & 20 & 7 & 13 & 52 \\ 80 & 24 & 45 & 57 & 70 \end{vmatrix}. \quad 48. \begin{vmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{9}{2} & -\frac{3}{2} & -3 \\ 5 & 8 & 2 & 7 \\ \frac{3}{3} & -\frac{3}{3} & -\frac{3}{3} & -\frac{3}{3} \\ \frac{4}{3} & -\frac{5}{3} & -1 & -\frac{2}{3} \\ \frac{3}{7} & -\frac{3}{8} & -4 & -5 \end{vmatrix}.$$

## 1.2. Правило Крамера

Нагадаємо, що за правилом Крамера система  $n$ -лінійних рівнянь з  $n$  невідомими сумісна і визначена, якщо  $\Delta \neq 0$ . Якщо  $\Delta = 0$  і всі  $\Delta_j = 0$ ,  $j = 1, 2, 3, \dots, n$ , то система сумісна, але невизначена. Якщо  $\Delta = 0$ , а хоча б один з  $\Delta_j \neq 0$ , то система лінійних рівнянь не сумісна.

**Завдання** (для підготовки до практичних занять: 49—56, 59; для аудиторних занять: 60, 62, 63, 66; домашні: 58, 61, 64, 67, 72; додаткові: 57, 65, 68—71).

*Закінchte вирази:*

49. Система лінійних рівнянь називається сумісною, якщо ...

50. Система лінійних рівнянь називається несумісною, якщо ...

51. Система лінійних рівнянь називається невизначеною, якщо ...

52. Система лінійних рівнянь називається однорідною, якщо ...

53. Сформулювати теорему Крамера.

54. В якому випадку за теоремою Крамера система лінійних рівнянь буде несумісною?

55. В якому випадку за теоремою Крамера система лінійних рівнянь буде невизначеною?

*Розв'язати системи лінійних рівнянь за правилом Крамера. У разі залежності коефіцієнтів системи рівнянь від параметрів дослідити системи на сумісність.*

$$56. \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = 1; \\ 3x_1 + 7x_2 = 2. \end{cases} \quad 57. \begin{cases} ax_1 + bx_2 = ad; \\ bx_1 + cx_2 = bd. \end{cases} \quad 58. \begin{cases} ax_1 + 4x_2 = 2; \\ 9x_1 + ax_2 = 3. \end{cases}$$

$$59. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 10; \\ 3x_1 + 7x_2 + 4x_3 = 3; \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3. \end{cases} \quad 60. \begin{cases} 5x_1 - 6x_2 + 4x_3 = 3; \\ 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 2; \\ 4x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 1. \end{cases}$$

$$61. \begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -4; \\ 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -1; \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -3. \end{cases} \quad 62. \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 2; \\ 3x_1 - 5x_2 + 5x_3 = 3; \\ 5x_1 - 8x_2 + 6x_3 = 5. \end{cases}$$

$$63. \begin{cases} 5x_1 - 6x_2 + x_3 = 4; \\ 3x_1 - 5x_2 - 2x_3 = 3; \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 5. \end{cases} \quad 64. \begin{cases} 2ax_1 - 23x_2 + 29x_3 = 4; \\ 7x_1 + ax_2 + 4x_3 = 7; \\ 5x_1 + 2x_2 + ax_3 = 5. \end{cases}$$

$$65. \begin{cases} ax_1 - 3x_2 + 5x_3 = 4; \\ x_1 - ax_2 + 3x_3 = 2; \\ 9x_1 - 7x_2 + 8ax_3 = 0. \end{cases}$$

$$66. \begin{cases} ax_1 + 4x_2 + x_3 = 0; \\ 2x_2 + 3x_3 = 1; \\ 3x_1 - bx_3 = -2. \end{cases}$$

$$67. \begin{cases} ax_1 + 2x_3 = 2; \\ 5x_1 + 2x_2 = 1; \\ x_1 - 2x_2 + bx_3 = 3. \end{cases}$$

$$68. \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 4; \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 6; \\ 8x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 12; \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 6. \end{cases}$$

$$69. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 11x_3 + 5x_4 = 2; \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 1; \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -3; \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -3. \end{cases}$$

$$70. \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = -3; \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 5x_4 = -6; \\ 6x_1 + 8x_2 + x_3 + 5x_4 = -8; \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 7x_4 = -8. \end{cases}$$

$$71. \begin{cases} 7x_1 + 9x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 2; \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 6; \\ 5x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 3; \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

$$72. \begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 + x_4 = 5; \\ 3x_1 - 7x_2 + 3x_3 - x_4 = -1; \\ 5x_1 - 9x_2 + 6x_3 + 4x_4 = 7; \\ 4x_1 - 6x_2 + 3x_3 + x_4 = 8. \end{cases}$$

### 1.3. Матриці, дії над матрицями. Обернена матриця

Нагадаємо, що матриця, на відміну від визначника, — це таблиця чисел певного розміру. При множенні її на число треба помножити на це число кожен елемент матриці. Додавати можна тільки матриці однакового розміру, їх сумою є матриця, елементи якої є сумами відповідних елементів матриць, що додаються.

Дія множення означена тільки для таких двох матриць, які мають такі розміри: перша  $m \times p$ , друга  $p \times n$ . В результаті одержується матриця розміром  $m \times n$ , елементи якої дорівнюють алгебраїчній сумі добутків елементів рядків першої матриці на відповідні елементи стовпчиків другої матриці за формулою:

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ip}b_{pj}.$$

Зрозуміло, що в загальному випадку дія множення матриць некомутативна, тобто  $A \cdot B \neq B \cdot A$ .

Обернену матрицю  $A^{-1}$  має тільки квадратна невинроджена матриця  $A$  і вона така, що виконується рівність:  $A^{-1}A = A \cdot A^{-1} = E$ .

Якщо в матричному рівнянні  $AX = B$  матриця  $A$  така, що для неї існує обернена  $A^{-1}$ , то розв'язок цього рівняння можна записати так:  $X = A^{-1}B$ .

**Завдання** (для підготовки до практичних занять: 73—84, 100, 114, 116, 121; для аудиторних занять: 86, 93, 102, 115, 122; домашні: 87, 89, 94, 103, 117, 123, 124; додаткові: 85, 88, 90—92, 95—99, 104, 105, 118—120, 125, 126).

*Закінchte вирази:*

- 73. Матрицею називається ...
- 74. Матриця називається діагональною, якщо ...
- 75. Матриця називається одиничною, якщо ...
- 76. Для того щоб одержати суму матриць, треба ...
- 77. Для того щоб помножити матрицю на число, треба ...
- 78. Множення матриць виконується за таким правилом: ...
- 79. Квадратна матриця називається невивродженою, якщо ...
- 80. Сформулювати теорему про існування і єдиність оберненої матриці.
- 81. Сформулювати правило побудови оберненої матриці.
- 82. Як подати систему лінійних рівнянь у матричній формі?
- 83. Як розв'язати систему лінійних рівнянь за допомогою оберненої матриці?

*Знайти добутки матриць:*

84.  $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ .

85.  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \delta & & \psi \end{pmatrix}$ .

86.  $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ .

87.  $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ .

88.  $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 & 8 \\ 4 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ .

89.  $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$ .

90.  $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 70 & 34 & -107 \\ 52 & 26 & -68 \\ 101 & 50 & -140 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 27 & -18 & 10 \\ -46 & 31 & -17 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$91. \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -28 & 93 \\ 38 & -126 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$92. \begin{pmatrix} 3 & 8 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$93. (1-2 \quad 4 \quad 6) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$94. \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}^2.$$

Обчислити вирази:

$$95. \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}^3.$$

$$96. \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}^5.$$

$$97. \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & +1 \end{pmatrix}^4.$$

98. Знайти значення полінома  $3A^2 - 2A - 5$  від матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}.$$

99. Знайти значення полінома  $A^3 - 7A^2 + 13A - E$  від матриці

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

100. Чи впливає з рівності  $AB = 0$ , що одна з матриць-співмножниць нульова?

101. Чи справедливі для матриць рівності

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2, \quad (A+B)(A-B) = A^2 - B^2?$$

Для нижченаведених матриць  $A$  знайти всі матриці  $B$ , для яких виконується рівність  $AB = BA$ .

$$102. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}. \quad 103. A = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}. \quad 104. A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

105. Знайти всі матриці другого порядку, для яких виконується рівність  $A^2 = 0$ .

Знайти обернені до таких матриць:

$$106. \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}. \quad 107. \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}. \quad 108. \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}. \quad 109. \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

$$110. \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}. \quad 111. \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$112. \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}. \quad 113. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язати матричні рівняння:

$$114. \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}. \quad 115. \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}.$$

$$116. \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

$$117. X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 3 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -2 & 15 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$118. \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 8 & 1 & 2 \end{pmatrix}. \quad 119. X \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$120. \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 7 \\ 6 & 5 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Звести до матричного вигляду системи рівнянь і розв'язати методом оберненої матриці:

$$121. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8; \\ -2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = -5; \\ 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 10. \end{cases} \quad 122. \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 0; \\ 3x_2 + 4x_3 = -6; \\ x_1 + x_3 = 1. \end{cases}$$

$$123. \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - x_3 = -6; \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 = -5; \\ x_1 + x_2 + x_3 = -2. \end{cases}$$

$$124. \begin{cases} -2x_1 + x_2 = -6; \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 5; \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 13. \end{cases}$$

$$125. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6; \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 4; \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 = 0. \end{cases}$$

$$126. \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = -3; \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 8; \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6; \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 3. \end{cases}$$

#### **1.4. Розв'язання систем лінійних рівнянь у загальному випадку**

Для знаходження рангу матриці методом обвідних мінорів треба знайти відмінний від нуля мінор  $k$ -го порядку і утворити для нього всі можливі обвідні мінори  $(k + 1)$ -го порядку. Якщо всі вони рівні нулю, то ранг матриці дорівнює  $k$ . Якщо знайдеться хоча б один обвідний мінор, відмінний від нуля, то для нього утворюють обвідні мінори  $(k + 2)$ -го порядку і процедура знаходження рангу матриці повторюється.

Використовуючи те, що елементарні перетворення не змінюють ранг матриці, за їх допомогою матрицю можна звести до такого вигляду, що по один бік від головної діагоналі всі елементи дорівнюватимуть нулю. З такого вигляду матриці легко знайти відмінний від нуля мінор найвищого порядку.

Розглянемо приклади розв'язання систем  $m$ -лінійних рівнянь з  $n$  невідомими, використовуючи теорему Кронекера—Капеллі та метод Жордана—Гаусса.

**Приклад 4.** Розв'язати систему рівнянь за допомогою теореми Кронекера—Капеллі.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 5; \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -6; \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -1; \\ 4x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 5x_4 = -7. \end{cases}$$

Запишемо головну і розширену матриці системи рівнянь і знайдемо їх ранги за допомогою елементарних перетворень.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 & | & 5 \\ 1 & 2 & -2 & 3 & | & -6 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & | & -1 \\ 4 & 3 & -3 & 5 & | & -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -5 & 5 & -7 & | & 17 \\ 1 & 2 & -2 & 3 & | & -6 \\ 0 & -5 & 5 & -7 & | & 17 \\ 0 & -5 & 5 & -7 & | & 17 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & -5 & 5 & -7 & | & 17 \\ 1 & 2 & -2 & 3 & | & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}.$$

З остаточного вигляду матриці випливає, що найвищий порядок мінора, який можна утворити для обох матриць, дорівнює 2. Тобто,  $r(A) = r(\overline{A}) = 2$ . Система рівнянь сумісна. Серед відмінних від нуля мінорів другого порядку оберемо, наприклад, міnor  $\begin{vmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}$ , тим самим переводячи невідомі  $x_3, x_4$  в розряд головних, а  $x_1, x_2$  — в розряд вільних. Відкинемо в системі рівнянь ті рівняння, які відповідають рядкам головної матриці, що занулилися. Одержимо таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} 5x_3 - 7x_4 = 17 + 5x_2; \\ -2x_3 + 3x_4 = -6 - x_1 - 2x_2. \end{cases}$$

Цю систему рівнянь можна розв'язувати або за правилом Крамера, або методом оберненої матриці, тому що  $\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ . Побудуємо  $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$  і одержимо розв'язок  $\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 17 + 5x_2 \\ -6 - x_1 - 2x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 - 7x_1 + x_2 \\ 4 - 5x_1 \end{pmatrix}$ , або  $x_3 = 9 - 7x_1 + x_2$ ;  $x_4 = 4 - 5x_1$ , який є загальним розв'язком системи рівнянь. Надаючи вільним невідомим значень  $x_1 = 1, x_2 = 0$ , матимемо один з можливих частинних розв'язків  $(1; 0; 2; -1)$ .

**Приклад 5.** Розв'язати систему рівнянь методом Жордана—Гаусса:

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 2; \\ 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6; \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2. \end{cases}$$

Створимо таблицю методу Жордана—Гаусса:

| $x_1$ | $x_2$                                                         | $x_3$                                                         | $x_4$ | $b_i$ | $\Sigma$ | contr |
|-------|---------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------|-------|-------|----------|-------|
| -1    | 2                                                             | <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">1</span> | -1    | 2     | 3        |       |
| 2     | 7                                                             | 3                                                             | 1     | 6     | 19       |       |
| 9     | 4                                                             | 1                                                             | 7     | 2     | 23       |       |
| -1    | 2                                                             | 1                                                             | -1    | 2     | 3        | 3     |
| 5     | <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">1</span> | 0                                                             | 4     | 0     | 10       | 10    |
| 10    | 2                                                             | 0                                                             | 8     | 0     | 20       | 20    |
| -11   | 0                                                             | 1                                                             | -9    | 2     | -17      | -17   |
| 5     | 1                                                             | 0                                                             | 4     | 0     | 10       | 10    |
| 0     | 0                                                             | 0                                                             | 0     | 0     | 0        | 0     |

За формулою  $b_{kl} = \frac{a_{kl}a_{ij} - a_{il}a_{kj}}{a_{ij}}$  заповнюємо решту таблиці. Нагадаємо, що за розв’язувальний елемент  $a_{ij} \neq 0$  краще обирати одиницю, якщо вона є. Розв’язувальний елемент у певному рядку  $i$  в певному стовпчику можна обирати тільки один раз. Правильність обчислень слід перевіряти в кожному рядку, заповнюючи стовпчик «contr».

Повернімося тепер від таблиці до системи рівнянь. Оскільки розв’язувальні елементи обиралися в третьому і другому стовпчиках, то відповідні невідомі  $x_2$  і  $x_3$  будуть головними. Кількість можливих кроків методу Жордана—Гаусса дорівнює двом, тому  $\text{rang } A = 2$ . На перетині останнього рядка таблиці і стовпчика  $b_i$  також стоїть нуль, тому  $\text{rang } A = 2$  — система сумісна. Остаточ-но маємо такий загальний розв’язок:

$$x_2 = -5x_1 - 4x_4; \quad x_3 = 2 + 11x_1 + 9x_4.$$

**Приклад 6.** Розв’язати однорідну систему рівнянь і побудувати фундаментальну систему розв’язків.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 9x_4 - x_5 = 0; \\ 3x_1 + 9x_2 - 15x_3 + 8x_4 - 3x_5 = 0; \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = 0; \\ -x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 9x_4 + x_5 = 0; \\ 3x_1 + x_2 - 8x_3 + 2x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$$

Скористаємось ще раз методом Жордана—Гаусса, побудувавши відповідну таблицю:

| $x_1$    | $x_2$     | $x_3$           | $x_4$          | $x_5$          | $b_i$ | $\Sigma$       | contr          |
|----------|-----------|-----------------|----------------|----------------|-------|----------------|----------------|
| <u>1</u> | 3         | -5              | 9              | -1             | 0     | 7              |                |
| 3        | 9         | -15             | 8              | -3             | 0     | 2              |                |
| 1        | -5        | 2               | -16            | 3              | 0     | -15            |                |
| 1        | 3         | -5              | 9              | -1             | 0     | 7              |                |
| 3        | 1         | -8              | 2              | 1              | 0     | -1             |                |
| 1        | 3         | -5              | 9              | -1             | 0     | 7              |                |
| 0        | 0         | 0               | -19            | 0              | 0     | -19            | -19            |
| 0        | <u>-8</u> | 7               | -25            | 4              | 0     | -22            | -22            |
| 0        | 0         | 0               | 0              | 0              | 0     | 0              | 0              |
| 0        | -8        | 7               | -25            | 4              | 0     | -22            | -22            |
| 1        | 0         | $-\frac{19}{8}$ | $-\frac{3}{8}$ | $\frac{1}{2}$  | 0     | $-\frac{5}{4}$ | $-\frac{5}{4}$ |
| 0        | 0         | 0               | <u>1</u>       | 0              | 0     | 1              | 1              |
| 0        | 1         | $-\frac{7}{8}$  | $\frac{25}{8}$ | $-\frac{1}{2}$ | 0     | $\frac{11}{4}$ | $\frac{11}{4}$ |
| 0        | 0         | 0               | 0              | 0              | 0     | 0              | 0              |
| 0        | 0         | 0               | 0              | 0              | 0     | 0              | 0              |
| 1        | 0         | $-\frac{19}{8}$ | 0              | $\frac{1}{2}$  | 0     | $-\frac{5}{4}$ | $-\frac{5}{4}$ |
| 0        | 0         | 0               | 1              | 0              | 0     | 1              | 1              |
| 0        | 1         | $-\frac{7}{8}$  | 0              | $-\frac{1}{2}$ | 0     | $\frac{11}{4}$ | $\frac{11}{4}$ |
| 0        | 0         | 0               | 0              | 0              | 0     | 0              | 0              |
| 0        | 0         | 0               | 0              | 0              | 0     | 0              | 0              |

Головними невідомими є  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_4$ , а загальний розв'язок має вигляд:

$$x_1 = \frac{19}{8}x_3 - \frac{1}{2}x_5; \quad x_2 = \frac{7}{8}x_3 + \frac{1}{2}x_5; \quad x_4 = 0.$$

Для одержання фундаментальної системи розв'язків розглянемо визначник  $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$  і надамо вільним невідомим  $x_3, x_5$  значень відповідно першого і другого рядків цього визначника. Матимемо фундаментальну систему, яка буде складатися з двох розв'язків:

$$\left(\frac{19}{8}; \frac{7}{8}; 1; 0; 0\right), \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0; 0; 1\right).$$

**Завдання** (для підготовки до практичних занять: 127—139, 150, 164; для аудиторних занять: 140, 143, 146, 158, 165; домашні: 141, 144, 147, 149, 159, 166; додаткові: 142, 145, 148, 151—157, 160—163, 167—172).

*Закінchte вирази:*

127. Рангом матриці називається ...  
 128. Елементарним перетворенням матриці називається ...  
 129. Обвідним мінором для мінора  $k$ -го порядку називається ...  
 130. Чи змінюють елементарні перетворення ранг матриці? Чому?  
 131. Головною матрицею системи лінійних рівнянь називається ...  
 132. Розширеною матрицею системи лінійних рівнянь називається ...  
 133. Сформулювати теорему Кронекера—Капеллі.  
 134. Як розв'язувати систему рівнянь методом Жордана—Гаусса?  
 135. Як вибирається розв'язувальний елемент?  
 136. Тривіальним розв'язком системи лінійних однорідних рівнянь називається ...  
 137. Що є умовою одержання нетривіального розв'язку?  
 138. Як будується фундаментальна система розв'язків?  
 Знайти ранги матриць методом обвідних мінорів:

$$\begin{array}{ll} 139. \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix} & 140. \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix} \\ 141. \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} & 142. \begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 & 2 & 3 \\ 8 & 6 & -7 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & -8 & 2 & 7 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & -5 \\ 8 & 6 & -1 & 4 & -6 \end{pmatrix} \end{array}$$

Обчислити ранги матриць за допомогою елементарних перетворень:

$$143. \begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 75 & 94 & 54 & 134 \\ 25 & 32 & 20 & 48 \end{pmatrix}. \quad 144. \begin{pmatrix} 47 & -67 & 35 & 201 & 155 \\ 26 & 98 & 23 & -294 & 86 \\ 16 & -428 & 1 & 1284 & 52 \end{pmatrix}.$$

$$145. \begin{pmatrix} 24 & 19 & 36 & 72 & -38 \\ 49 & 40 & 73 & 147 & -80 \\ 73 & 59 & 98 & 219 & -118 \\ 47 & 36 & 71 & 141 & -72 \end{pmatrix}.$$

Розв'язати системи рівнянь за допомогою теореми Кронекера—Капеллі або методом Жордана—Гаусса, знайти загальний та один із частинних розв'язків:

$$146. \begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6; \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4; \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2. \end{cases} \quad 147. \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 1; \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2; \\ 2x_1 - 3x_2 - 11x_3 - 15x_4 = 1. \end{cases}$$

$$148. \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3; \\ 6x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 7; \\ 9x_1 + 12x_2 + 3x_3 + 10x_4 = 13. \end{cases} \quad 149. \begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2; \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 5; \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3. \end{cases}$$

$$150. \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 = 8; \\ 4x_1 + 3x_2 - 9x_3 = 9; \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 7; \\ x_1 + 8x_2 - 7x_3 = 12. \end{cases} \quad 151. \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2; \\ 6x_1 - 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 3; \\ 9x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4. \end{cases}$$

$$152. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 7x_4 = 5; \\ 6x_1 - 3x_2 + x_3 - 4x_4 = 7; \\ 4x_1 - 2x_2 + 14x_3 - 31x_4 = 18. \end{cases} \quad 153. \begin{cases} 9x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 4; \\ 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 5; \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 + 14x_4 = -8. \end{cases}$$

$$154. \begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1; \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 = 2; \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1; \\ 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 3x_4 + 9x_5 = 2. \end{cases}$$

$$155. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2; \\ 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 3; \\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 13x_5 = 9; \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 1. \end{cases}$$

$$156. \begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 1; \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 + 2x_5 = 3; \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = -7; \\ 9x_1 + 6x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 2. \end{cases}$$

$$157. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 4; \\ 3x_1 + 6x_2 + 5x_3 - 4x_4 + 3x_5 = 5; \\ x_1 + 2x_2 + 7x_3 - 4x_4 + x_5 = 11; \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 + 3x_5 = 6. \end{cases}$$

Дослідити системи рівнянь і знайти загальний розв'язок залежно від значення параметра  $\alpha$ :

$$158. \begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 3; \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 1; \\ 8x_1 - 6x_2 - x_3 - 5x_4 = 9; \\ 7x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 17x_4 = \alpha. \end{cases}$$

$$159. \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 3; \\ 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 8x_4 = 5; \\ x_1 - 6x_2 - 9x_3 - 20x_4 = -11; \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 + \alpha x_4 = 2. \end{cases}$$

$$160. \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + x_3 + 3x_4 = 2; \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 4; \\ 4x_1 + 14x_2 + x_3 + 7x_4 = 4; \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 + \alpha x_4 = 7. \end{cases}$$

$$161. \begin{cases} \alpha x_1 + x_2 + x_3 = 1; \\ x_1 + \alpha x_2 + x_3 = 1; \\ x_1 + x_2 + \alpha x_3 = 1. \end{cases}$$

$$162. \begin{cases} (1+\alpha)x_1 + x_2 + x_3 = 1; \\ x_1 + (1+\alpha)x_2 + x_3 = \alpha; \\ x_1 + x_2 + (1+\alpha)x_3 = \alpha^2. \end{cases}$$

$$163. \begin{cases} (\alpha+1)x_1 + x_2 + x_3 = \alpha(\alpha+3); \\ x_1 + (\alpha+1)x_2 + x_3 = \alpha^2(\alpha+3); \\ x_1 + x_2 + (\alpha+1)x_3 = \alpha^3(\alpha+3). \end{cases}$$

Знайти загальні розв'язки і фундаментальні системи розв'язків таких систем рівнянь:

$$164. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0; \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0; \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0; \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0. \end{cases}$$

$$165. \begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0; \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0; \\ 4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 = 0. \end{cases}$$

$$166. \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 0; \\ 6x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 7x_5 = 0; \\ 9x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 0; \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_4 + 8x_5 = 0. \end{cases}$$

$$167. \begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0; \\ 4x_1 + 7x_2 + 5x_3 = 0; \\ x_1 + x_2 - 4x_3 = 0; \\ 2x_1 + 9x_2 + 6x_3 = 0. \end{cases}$$

$$168. \begin{cases} 6x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 5x_4 + 7x_5 = 0; \\ 9x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 9x_5 = 0; \\ 6x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 7x_4 + x_5 = 0; \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 + 4x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$$

$$169. \begin{cases} 2x_1 + x_2 - 4x_3 = 0; \\ 3x_1 + 5x_2 - 7x_3 = 0; \\ 4x_1 - 5x_2 - 6x_3 = 0. \end{cases}$$

$$170. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 0; \\ 4x_1 - 2x_2 + 7x_3 + 5x_4 = 0; \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 5x_4 = 0. \end{cases}$$

$$171. \begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 5x_4 + 8x_5 = 0; \\ 4x_1 + 4x_2 + 8x_3 + 5x_4 + 4x_5 = 0; \\ x_1 - 9x_2 - 3x_3 - 5x_4 - 14x_5 = 0; \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 5x_4 + 6x_5 = 0. \end{cases}$$

172. Які з рядків матриці  $A$  утворюють фундаментальну систему розв'язків для системи рівнянь?

$$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 = 0; \\ 5x_1 - 8x_2 + 5x_3 + 4x_4 + 3x_5 = 0; \\ x_1 - 7x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0; \\ 4x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 & -2 & -7 \\ 5 & 3 & 7 & -6 & -4 \\ 8 & 0 & -5 & 6 & 13 \\ 4 & -2 & -7 & -5 & -7 \end{pmatrix}.$$

### 1.5. $N$ -вимірний векторний простір

Нагадаємо, що базисом  $n$ -вимірного векторного простору буде лінійно незалежна система, що складається з  $n$  векторів. Базисом системи векторів буде максимальна лінійно незалежна підсистема даної системи векторів. Кількість векторів, що утворюють базис системи векторів, називають її рангом. Кожен вектор цієї системи векторів можна подати у вигляді лінійної комбінації векторів базису. Якщо з векторів системи утворити матрицю, рядки або стовпчики якої будуть координатами векторів системи, то ранг цієї матриці буде дорівнювати рангу системи векторів. Тому для знаходження базису і рангу системи векторів треба утворити матрицю, елементами якої є координати векторів, і знайти її ранг.

**Приклад 7.** Перевірка лінійної залежності системи векторів, знаходження її рангу та базису системи векторів. Вираження векторів, що не входять до базису, через вектори базису.

$$\vec{a}_1 = (5, 2, -3, 1); \quad \vec{a}_2 = (4, 1, -2, 3);$$

$$\vec{a}_3 = (1, 1, -1, -2); \quad \vec{a}_4 = (3, 4, -1, 2)$$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & 4 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 & 11 \\ 0 & -3 & 2 & 11 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 & 35 \\ 0 & 0 & 8 & 35 \\ 1 & 0 & -3 & -10 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 35 \\ 1 & 0 & 0 & 25 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

З останнього перетворення випливає, що  $r(A)=3$ . Система векторів лінійно залежна (розмір простору дорівнює чотирьом). Рядки матриці, що не занулилися, відповідають векторам базису. Тобто  $\vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4$  можуть утворювати базис. Знайдемо  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  такі, що  $\vec{a}_1 = \alpha_1 \vec{a}_2 + \alpha_2 \vec{a}_3 + \alpha_3 \vec{a}_4$ . Запишемо останню векторну рівність у вигляді системи рівнянь:

$$\begin{cases} 4\alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_3 = 5; \\ \alpha_1 + \alpha_2 + 4\alpha_3 = 2; \\ -2\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 = -3; \\ 3\alpha_1 - 2\alpha_2 + 2\alpha_3 = 1, \end{cases}$$

розв'язком якої є:  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1; \alpha_3 = 0$ . Отже,  $\vec{a}_1 = \vec{a}_2 + \vec{a}_3$ .

В  $n$ -вимірному векторному просторі можна вказати нескінченну кількість базисів. Зв'язок між старим  $\mathbf{e}$ :  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$  і новим  $\mathbf{e}'$ :  $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \dots, \vec{e}'_n$  базисами встановлює матриця переходу  $T$ , стовпчики якої (за означенням) складаються з координат векторів нового базису в старому базисі. Цей зв'язок встановлює матрична рівність  $\mathbf{e}' = \mathbf{e}T$ , де матриці  $\mathbf{e}'$  і  $\mathbf{e}$  утворені з векторів стовпчиків відповідних базисів. Матриця переходу  $T$  завжди квадратна і не-вироджена. Для неї завжди існує обернена матриця  $T^{-1}$ . Тому координати вектора  $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  у старому базисі і координати того самого вектора  $\vec{x} = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$  у новому базисі зв'язані співвідношеннями:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = T^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

**Приклад 8.** Перевірити того, що вектори

$$\mathbf{e} : \bar{\mathbf{e}}_1 = (2, 3, 5); \quad \bar{\mathbf{e}}_2 = (0, 1, 2); \quad \bar{\mathbf{e}}_3 = (1, 0, 0),$$

$$\mathbf{e}' : \bar{\mathbf{e}}'_1 = (1, 1, 1); \quad \bar{\mathbf{e}}'_2 = (1, 1, -1); \quad \bar{\mathbf{e}}'_3 = (2, 1, 2)$$

утворюють відповідно старий і новий базиси, знайти матриці переходу від старого до нового базису.

Утворимо матричну рівність, що дає змогу визначити зв'язок між базисами:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}. \quad \Delta(\mathbf{e}) = 1 \neq 0; \quad \Delta(\mathbf{e}') = -2 \neq 0.$$

Обидві системи утворюють базиси, тому що  $r(\mathbf{e}) = r(\mathbf{e}') = 3$ .

Розв'яжемо останню матричну рівність:

$$\mathbf{e}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -11 & 6 \\ 1 & -7 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Приклад 9.** Знайти координати вектора  $\bar{\mathbf{x}} = (1, 7, -6)$  у базисі  $\mathbf{e}' : \bar{\mathbf{e}}'_1 = (2, 1, -3); \quad \bar{\mathbf{e}}'_2 = (3, 2, -1); \quad \bar{\mathbf{e}}'_3 = (-1, 3, 1)$ . Якщо про старий базис не сказано в умові задачі, то вважається, що він одиничний, тому матриця переходу до базису  $\mathbf{e}'$  має вигляд:

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Delta(T) = -25 \neq 0; \quad T^{-1} = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} -5 & 2 & -11 \\ 10 & 1 & 7 \\ -5 & 7 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} -5 & 2 & -11 \\ 10 & 1 & 7 \\ -5 & 7 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ в базисі } \mathbf{e}' : \bar{\mathbf{x}} = (3, -1, 2).$$

Базис називається *ортogonalним*, якщо виконується рівність  $\bar{\mathbf{e}}_i \cdot \bar{\mathbf{e}}_j = 0$ , коли  $i \neq j$ . За виконання умови  $\bar{\mathbf{e}}_i \cdot \bar{\mathbf{e}}_j = \begin{cases} 1, & i = j; \\ 0, & i \neq j \end{cases}$  базис називається *ортонормованим*. Процес ортogonalізації системи векторів  $\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2, \dots, \bar{\mathbf{a}}_s$  — це перехід до нової системи векторів  $\bar{\mathbf{b}}_1, \bar{\mathbf{b}}_2, \dots, \bar{\mathbf{b}}_s$ , для яких виконується умова, що  $\bar{\mathbf{b}}_i \cdot \bar{\mathbf{b}}_j = 0, i \neq j$

за схемою:  $\vec{b}_1 = \vec{a}_1$ ;  $\vec{b}_k = \vec{a}_k - \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i \vec{b}_i$ ; ( $k = 2, 3, \dots, S$ ), де  $\alpha_i = \frac{(\vec{a}_k \cdot \vec{b}_i)}{\vec{b}_i \cdot \vec{b}_i}$   
 ( $i = 1, 2, \dots, k-1$ ),  $\vec{b}_i \neq 0$ .

**Приклад 10.** Ортонормувати базис векторів

$$\vec{e}_1 = (1, 0, -1); \quad \vec{e}_2 = (1, -1, 2); \quad \vec{e}_3 = (0, -1, 1); \quad \vec{b}_1 = \vec{e}_1 = (1, 0, -1);$$

$$\vec{b}_2 = \vec{e}_2 - \alpha_1 \vec{b}_1; \quad \alpha_1 = \frac{\vec{e}_2 \cdot \vec{b}_1}{\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_1} = \frac{1-2}{1+1} = -\frac{1}{2};$$

$$\vec{b}_2 = (1, -1, 2) + \frac{1}{2}(1, 0, -1) = \left(\frac{3}{2}, -1, \frac{3}{2}\right); \quad \vec{b}_3 = \vec{e}_3 - \alpha_1 \vec{b}_1 - \alpha_2 \vec{b}_2;$$

$$\alpha_1 = \frac{(\vec{e}_3 \cdot \vec{b}_1)}{(\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_1)} = \frac{-1}{1+1} = -\frac{1}{2}; \quad \alpha_2 = \frac{(\vec{e}_3 \cdot \vec{b}_2)}{(\vec{b}_2 \cdot \vec{b}_2)} = \frac{1 + \frac{3}{2}}{\frac{9}{4} + 1 + \frac{9}{4}} = \frac{5}{11};$$

$$\vec{b}_3 = (0, -1, 1) + \frac{1}{2}(1, 0, -1) - \frac{5}{11}\left(\frac{3}{2}, -1, \frac{3}{2}\right) = -\frac{2}{11}(1, 3, 1).$$

Щоб не було дробів у координатах ортогональних векторів, їх можна записати у вигляді:  $\vec{b}_1 = (1, 0, -1)$ ;  $\vec{b}_2 = (3, -2, 3)$ ;  $\vec{b}_3 = (1, 3, 1)$ . Нормовану систему векторів одержимо, коли кожен з них поділимо на його модуль.

$$\vec{e}'_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right); \quad \vec{e}'_2 = \left(\frac{3}{\sqrt{22}}, \frac{-2}{\sqrt{22}}, \frac{3}{\sqrt{22}}\right); \quad \vec{e}'_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{11}}, \frac{3}{\sqrt{11}}, \frac{1}{\sqrt{11}}\right).$$

**Завдання** (для підготовки до практичних занять: 173—184, 190—193; для аудиторних занять: 185, 194, 199, 207, 213, 215; домашні: 186, 187, 189, 195, 200, 208, 214, 216; додаткові: 188, 196—198, 201—206, 209—212, 217, 218).

*Закінchte вирази:*

**173.**  $n$ -вимірним векторним простором називається ...

**174.** Система векторів називається лінійно незалежною, якщо ...

**175.** Система векторів називається повною, якщо ...

**176.** Базисом  $n$ -вимірного векторного простору називається ...

**177.** Як будується матриця переходу між базисами?

**178.** Який базис називається ортогональним, ортонормованим?

**179.** Як ортогоналізувати базис?

**180.** Знайти лінійну комбінацію  $3\vec{a}_1 + 5\vec{a}_2 - \vec{a}_3$  векторів:

$$\vec{a}_1 = (4, 1, 3, -2), \quad \vec{a}_2 = (1, 2, -3, 2), \quad \vec{a}_3 = (16, 9, 1, -3).$$

**181.** При якому значенні  $\alpha$  система векторів

$$\vec{a}_1 = (\alpha, 10, -5), \quad \vec{a}_2 = (0, 2, 3), \quad \vec{a}_3 = -(-1, 2, -2)$$

буде лінійно залежною?

**182.** Знайти вектор  $\vec{x}$  з рівняння  $\vec{a}_1 + 20\vec{a}_2 + 3\vec{a}_3 + 4\vec{x} = 0$ , де

$$\vec{a}_1 = (5, -8, -1, 2); \quad \vec{a}_2 = (2, -1, 4, -3); \quad \vec{a}_3 = (-3, 2, -5, 4).$$

**183.** Знайти вектор  $\vec{x}$  з рівняння  $3(\vec{a}_1 - \vec{x}) + 2(\vec{a}_2 + \vec{x}) = 5(\vec{a}_3 + \vec{x})$ , де

$$\vec{a}_1 = (2, 5, 1, 3); \quad \vec{a}_2 = (10, 1, 5, 10); \quad \vec{a}_3 = (4, 1, -1, 1).$$

Які з нижченаведених систем векторів є лінійно залежними, а які — лінійно незалежними?

**184.**  $\vec{a}_1 = (1, 2, 3); \quad \vec{a}_2 = (3, 6, 7).$

**185.**  $\vec{a}_1 = (4, -2, 6); \quad \vec{a}_2 = (6, -3, 9).$

**186.**  $\vec{a}_1 = (2, -3, 1); \quad \vec{a}_2 = (3, -1, 5); \quad \vec{a}_3 = (1, -4, 3).$

**187.**  $\vec{a}_1 = (5, 4, 3); \quad \vec{a}_2 = (3, 3, 2); \quad \vec{a}_3 = (8, 1, 3).$

**188.**  $\vec{a}_1 = (4, -5, 2, 6); \quad \vec{a}_2 = (2, -2, 1, 3); \quad \vec{a}_3 = (6, -3, 3, 9); \quad \vec{a}_4 = (4, -1, 5, 6).$

**189.**  $\vec{a}_1 = (1, 0, 0, 2, 5); \quad \vec{a}_2 = (0, 1, 0, 3, 4);$

$$\vec{a}_3 = (0, 0, 1, 4, 7); \quad \vec{a}_4 = (2, -3, 4, 11, 12).$$

**190.** Довести, що система векторів, яка має два однакові вектори, лінійно залежна.

**191.** Довести, що система векторів, яка має нуль-вектор, лінійно залежна.

**192.** Довести, що коли підсистема системи векторів лінійно залежна, то і вся система векторів лінійно залежна.

**193.** Довести, що коли будь-яка підсистема системи векторів лінійно незалежна, то і вся система векторів лінійно незалежна.

Знайти всі значення  $\lambda$ , при яких вектор  $\vec{b}$  лінійно виражається через вектори  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_s$ :

$$\begin{array}{lll} \vec{a}_1 = (2, 3, 5); & \vec{a}_1 = (4, 4, 3); & \vec{a}_1 = (3, 4, 2); \\ \vec{a}_2 = (3, 7, 8); & \vec{a}_2 = (7, 2, 1); & \vec{a}_2 = (6, 8, 7); \\ 194. \quad \vec{a}_3 = (1, -6, 1); & 195. \quad \vec{a}_3 = (4, 1, 6); & 196. \quad \vec{b} = (9, 12, \lambda). \\ \vec{b} = (7, -2, \lambda). & \vec{b} = (5, 9, \lambda). & \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \vec{a}_1 = (3, 2, 5); & \vec{a}_1 = (3, 2, 6); \\ \vec{a}_2 = (2, 4, 7); & \vec{a}_2 = (7, 3, 9); \\ 197. \quad \vec{a}_3 = (5, 6, \lambda); & 198. \quad \vec{a}_3 = (5, 1, 3); \\ \vec{b} = (1, 3, 5). & \vec{b} = (\lambda, 2, 5). \end{array}$$

Знайти всі максимальні лінійно незалежні підсистеми (базиси) систем векторів:

$$\begin{array}{ll} \vec{a}_1 = (4, -1, 3, -2); & \vec{a}_1 = (1, 2, 0, 0); \\ \vec{a}_2 = (8, -2, 6, -4); & 200. \quad \vec{a}_2 = (1, 2, 3, 4); \\ 199. \quad \vec{a}_3 = (3, -1, 4, -2); & \vec{a}_3 = (3, 6, 0, 0). \\ \vec{a}_4 = (6, -2, 8, -4). & \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \vec{a}_1 = (1, 2, 3, 4); & \vec{a}_1 = (2, 1, -3, 1); & \vec{a}_1 = (1, 2, 3); \\ \vec{a}_2 = (2, 3, 4, 5); & \vec{a}_2 = (4, 2, -6, 2); & 203. \quad \vec{a}_2 = (2, 3, 4); \\ 201. \quad \vec{a}_3 = (3, 4, 5, 6); & \vec{a}_3 = (6, 3, -9, 3); & \vec{a}_3 = (3, 2, 3); \\ \vec{a}_4 = (4, 5, 6, 7). & \vec{a}_4 = (1, 1, 1, 1). & \vec{a}_4 = (1, 1, 1). \end{array}$$

Знайти будь-який базис системи векторів, а решту векторів, що не входять до базису, виразити через вектори базису:

$$\begin{array}{ll} \vec{a}_1 = (5, 2, -3, 1); & \vec{a}_1 = (2, -1, 3, 5); \\ \vec{a}_2 = (4, 1, -2, 3); & \vec{a}_2 = (4, -3, 1, 3); \\ 204. \quad \vec{a}_3 = (1, 1, -1, -2); & 205. \quad \vec{a}_3 = (3, -2, 3, 4); \\ \vec{a}_4 = (3, 4, -1, 2). & \vec{a}_4 = (4, -1, 15, 17); \\ & \vec{a}_5 = (7, -6, -7, 0). \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \vec{a}_1 = (1, 2, 3, -4); \\ \vec{a}_2 = (2, 3, -4, 1); \\ 206. \quad \vec{a}_3 = (2, -5, 8, -3); \\ \vec{a}_4 = (5, 26, -9, -12); \\ \vec{a}_5 = (3, -4, 1, 2). \end{array}$$

Вектори  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$  і  $\vec{x}$  задано в одиничному базисі. Довести, що вектори  $\vec{e}_i, i = (1, n)$  утворюють базис і знайти координати  $\vec{x}$  в цьому базисі:

**207.**  $\vec{e}_1 = (1, 1, 1); \vec{e}_2 = (1, 1, 2); \vec{e}_3 = (1, 2, 3); \vec{x} = (6, 9, 14).$

**208.**  $\vec{e}_1 = (2, 1, -3); \vec{e}_2 = (3, 2, -5); \vec{e}_3 = (1, -1, 1); \vec{x} = (6, 2, -7).$

**209.**  $\vec{e}_1 = (1, 2, -1, -2); \vec{e}_2 = (2, 3, 0, -1); \vec{e}_3 = (1, 2, 1, 4);$   
 $\vec{e}_4 = (1, 3, -1, 0); \vec{x} = (7, 14, -1, 2).$

**210.**  $\vec{e}_1 = (2, 4, 8, 3); \vec{e}_2 = (2, 3, 5, 3); \vec{e}_3 = (-1, -1, -3, -2);$   
 $\vec{e}_4 = (1, 2, 4, 2); \vec{x} = (4, 6, 12, 6).$

Довести, що кожна з двох систем векторів  $\mathbf{e}$  і  $\mathbf{e}'$  утворюють базис, і знайти зв'язок координат того самого вектора в цих двох базисах:

**211.  $\mathbf{e}$ :**  $\vec{e}_1 = (1, 2, 1); \vec{e}_2 = (2, 3, 3); \vec{e}_3 = (3, 7, 1).$

**$\mathbf{e}'$ :**  $\vec{e}'_1 = (3, 1, 4); \vec{e}'_2 = (5, 2, 1); \vec{e}'_3 = (1, 1, -6).$

**212.  $\mathbf{e}$ :**  $\vec{e}_1 = (1, 1, 1, 1); \vec{e}_2 = (1, 2, 1, 1); \vec{e}_3 = (1, 1, 2, 1); \vec{e}_4 = (1, 3, 2, 3).$

**$\mathbf{e}'$ :**  $\vec{e}'_1 = (1, 0, 3, 3); \vec{e}'_2 = (-2, -3, -5, -4); \vec{e}'_3 = (2, 2, 5, 4);$   
 $\vec{e}'_4 = (-2, -3, -4, -4).$

Знайти матрицю переходу від базису  $\mathbf{e}$  до  $\mathbf{e}'$ :

**213.  $\mathbf{e}$ :**  $\vec{e}_1 = (2, 0, 3); \vec{e}_2 = (4, 1, 5); \vec{e}_3 = (3, 1, 2).$

**$\mathbf{e}'$ :**  $\vec{e}'_1 = (1, 2, -1); \vec{e}'_2 = (4, 5, -2); \vec{e}'_3 = (1, -1, 1).$

**214.  $\mathbf{e}$ :**  $\vec{e}_1 = (3, 2, 3); \vec{e}_2 = (-4, -3, -5); \vec{e}_3 = (5, 1, -1).$

**$\mathbf{e}'$ :**  $\vec{e}'_1 = (1, 1, 1), \vec{e}'_2 = (1, 1, -1), \vec{e}'_3 = (1, -1, 1).$

Ортогоналізувати базиси:

**215.**  $\vec{e}_1 = (1, 1, -1); \vec{e}_2 = (0, 2, -1); \vec{e}_3 = (1, 0, -1).$

**216.**  $\vec{e}_1 = (2, -1, 0); \vec{e}_2 = (0, 1, -1); \vec{e}_3 = (1, 0, -1).$

**217.**  $\vec{e}_1 = (1, -2, 2, -3); \vec{e}_2 = (2, -3, 2, 4);$   
 $\vec{e}_3 = (0, 1, 0, 1); \vec{e}_4 = (1, -1, 0, 0).$

**218.**  $\vec{e}_1 = (1, 1, 1, -2); \vec{e}_2 = (1, 1, 3, -3);$   
 $\vec{e}_3 = (1, -1, -1, 0); \vec{e}_4 = (2, 0, 0, 1).$

### 1.6. Лінійні перетворення векторного простору. Власні числа і вектори лінійного перетворення

Координати образу  $\varphi \vec{x}$  вектора  $\vec{x}$  за лінійного перетворення  $\varphi$  з матрицею  $A$  знаходять за формулою

$$y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \quad (i=1, 2, \dots, n),$$

або в матричному записі:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

**Приклад 11.** Знайти образ вектора  $\vec{x} = (-1, 2, 1)$  при лінійному перетворенні  $\varphi$  з матрицею  $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

Позначимо координати образу вектора  $\vec{x}$  через  $(y_1, y_2, y_3)$ , тоді

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - 3x_2 + x_3 \\ 4x_2 + 5x_3 \\ -2x_1 + x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 13 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

**Приклад 12.** Образами  $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3 \in$  вектори  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ . Знайти матрицю цього лінійного перетворення, показати, що вона єдина:

$$\begin{aligned} \vec{b}_1 &= (1, 0, -2); \quad \vec{b}_2 = (-1, 2, 3); \quad \vec{b}_3 = (0, -2, 1). \\ \vec{a}_1 &= (3, -1, -2); \quad \vec{a}_2 = (-1, 2, 0); \quad \vec{a}_3 = (-1, -1, 2). \end{aligned}$$

Використовуючи матричну форму запису лінійного перетворення, маємо:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Знайдемо визначник: } \begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0.$$

Побудуємо обернену матрицю:  $\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ .

Матрицю  $A$  одержимо зі співвідношення:

$$A = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -6 \\ 8 & 10 & 5 \end{pmatrix}.$$

Для невиродженої квадратної матриці існує єдина обернена матриця, тому матриця  $A$  також єдина.

Вигляд матриці лінійного перетворення суттєво залежить від вибору базису, в якому розглядається це перетворення.

Нехай  $\mathbf{e}: \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$  — старий, а  $\mathbf{e}': \vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \dots, \vec{e}'_n$  — новий базиси з матрицею переходу  $T$ . Матриця  $A$  — матриця лінійного перетворення  $\phi$  в старому базисі, а матриця  $B$  — матриця лінійного перетворення  $\phi$  в новому базисі. Тоді має місце співвідношення:  $B = T^{-1}A \cdot T$ , а матриці  $A$  і  $B$ , для яких можна знайти таку квадратну невироджену матрицю  $T$ , називаються подібними.

Спектри подібних матриць збігаються, тобто подібні матриці мають однакові характеристичні поліноми.

Якщо для матриці з дійсним спектром можна побудувати базис з власних векторів, то матриця лінійного перетворення в ньому набуває найпростішого канонічного вигляду.

**Приклад 13.** Знайти базис, якщо він існує, в якому матриця лінійного перетворення  $A$  набуває найпростішого вигляду:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Побудуємо характеристичне рівняння матриці  $A$ .

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 3 & -1 \\ -3 & 5-\lambda & -1 \\ -3 & 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-2)^2 = 0; \quad \lambda_1 = 1; \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 2.$$

Побудуємо власні вектори для кожного з власних чисел:

1)  $\lambda = 1$

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ -3 & 4 & -1 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0; \\ 3x_1 - 4x_2 + x_3 = 0; \\ x_1 - x_2 = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_3; \\ x_2 = x_3. \end{cases} \vec{b}_1 = (1, 1, 1);$$

2)  $\lambda = 2$ .

$$\begin{pmatrix} -3 & 3 & -1 \\ -3 & 3 & -1 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + x_3 = 0; \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 = 0; \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 = 0; \end{cases} \Rightarrow x_3 = -3x_1 + 3x_2.$$

Будуємо фундаментальну систему розв'язків і одержуємо:  
 $\vec{b}_2 = (1, 0, -3)$ ,  $\vec{b}_3 = (0, 1, 3)$ . Матриця переходу до базису  $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$

має вигляд:  $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$

Побудуємо обернену матрицю:  $T^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -3 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$  Остаточно

маємо:

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -3 & 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

**Завдання** (для підготовки до практичних занять: 219—226; для аудиторних занять: 227, 231, 234, 239, 240, 248, 251; домашні: 228, 232, 235, 241, 249, 252; додаткові: 229, 230, 233, 236—238, 242—247, 250, 253, 254).

*Закінchte вирази:*

**219.** Лінійним перетворенням векторного простору називається ...

**220.** Матриці  $A$  і  $B$  подібні, якщо ...

**221.** Власним вектором матриці називається ...

**222.** Характеристичним числом матриці називається ...

**223.** Спектром матриці називається ...

**224.** Як побудувати характеристичну матрицю для квадратної матриці?

**225.** В якому базисі матриця лінійного перетворення набуває найпростішого вигляду?

**226.** Чи завжди можна побудувати базис, в якому матриця лінійного перетворення набуває найпростішого вигляду?

Знайти образ вектора  $\vec{x}$  за лінійного перетворення  $\phi$  з матрицею  $A$ :

$$227. \vec{x} = (1, -2, 4); A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 4 \\ 2 & -5 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$228. \vec{x} = (2, -1, 3); A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 5 & -2 & 6 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$229. \vec{x} = (1, 0, 2, -3); A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 4 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

**230.** Знайти образи системи векторів  $\vec{a}_1 = (1, 2, -1)$ ,  $\vec{a}_2 = (3, -4, 0)$ ,  $\vec{a}_3 = (2, -1, 1)$  за лінійного перетворення з матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 4 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Знайти матриці лінійних перетворень векторів  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$  в вектори  $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ , довести, що вони єдині:

$$231. \vec{a}_1 = (1, -1, 4); \vec{a}_2 = (-1, 2, -3); \vec{a}_3 = (0, 1, -1);$$

$$\vec{b}_1 = (1, 0, 0); \vec{b}_2 = (0, 1, 0); \vec{b}_3 = (0, 0, 1).$$

$$232. \vec{a}_1 = (2, 3, 5); \vec{a}_2 = (0, 1, 2); \vec{a}_3 = (1, 0, 0);$$

$$\vec{b}_1 = (1, 1, 1); \vec{b}_2 = (1, 1, -1); \vec{b}_3 = (2, 1, 2).$$

$$233. \vec{a}_1 = (2, 0, 3); \vec{a}_2 = (4, 1, 5); \vec{a}_3 = (3, 1, 2);$$

$$\vec{b}_1 = (1, 2, -1); \vec{b}_2 = (4, 5, -2); \vec{b}_3 = (1, -1, 1).$$

**234.** Лінійне перетворення в базисі  $\vec{e}_1 = (1, 2)$ ,  $\vec{e}_2 = (2, 3)$  має матрицю  $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ . Знайти його матрицю в базисі  $\vec{e}'_1 = (3, 1)$ ,  $\vec{e}'_2 = (4, 2)$ .

**235.** Лінійне перетворення в базисі  $\vec{e}_1 = (-3, 7)$ ,  $\vec{e}_2 = (1, -2)$  має матрицю  $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$ . Знайти його матрицю в базисі  $\vec{e}'_1 = (6, -7)$ ,  $\vec{e}'_2 = (-5, 6)$ .

**236.** Лінійне перетворення  $\phi$  в базисі  $\vec{e}_1 = (1, 0, 0)$ ,  $\vec{e}_2 = (0, 1, 0)$ ,  $\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$  має матрицю  $A = \begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}$ . Знайти його матрицю в базисі  $\vec{e}'_1 = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + \vec{e}_3$ ,  $\vec{e}'_2 = 3\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 + \vec{e}_3$ ;  $\vec{e}'_3 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3$ .

**237.** Лінійне перетворення  $\phi$  в базисі  $\vec{e}_1 = (8, -6, 7)$ ,  $\vec{e}_2 = (-16, 7, -13)$ ,  $\vec{e}_3 = (9, -3, 7)$  має матрицю  $\begin{pmatrix} 1 & -18 & 15 \\ -1 & -22 & 20 \\ 1 & -25 & 22 \end{pmatrix}$ . Знайти його матрицю в базисі  $\vec{e}'_1 = (1, -2, 1)$ ,  $\vec{e}'_2 = (3, -1, 2)$ ,  $\vec{e}'_3 = (3, 1, 2)$ .

**238.** Лінійне перетворення  $\phi$  в одиничному базисі  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4$  має матрицю  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ . Знайти матрицю цього перетворення в базисі: 1)  $\vec{e}_1, \vec{e}_3, \vec{e}_2, \vec{e}_4$ ; 2)  $\vec{e}_1, \vec{e}_1 + \vec{e}_2, \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4$ .

Знайти власні числа і власні вектори лінійних перетворень, які задані матрицями:

$$239. \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \quad 240. \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}. \quad 241. \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$242. \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}. \quad 243. \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}. \quad 244. \begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}.$$

$$245. \begin{pmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}. \quad 246. \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad 247. \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Чи подібні між собою матриці  $A$  і  $B$ ?

$$248. A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 2 & 6 & -10 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 6 & 20 & -34 \\ 6 & 32 & -51 \\ 4 & 20 & -32 \end{pmatrix}.$$

$$249. A = \begin{pmatrix} 6 & 6 & -15 \\ 1 & 5 & -5 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 37 & -20 & -4 \\ 34 & -17 & -4 \\ 119 & -70 & -11 \end{pmatrix}.$$

$$250. A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & -15 \\ 1 & 3 & -5 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} -13 & -70 & 119 \\ -4 & -19 & 34 \\ -4 & -20 & 35 \end{pmatrix}.$$

Знайти базис, в якому матриця лінійного перетворення  $A$  набуває канонічного вигляду, записати цей вигляд:

$$251. A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & -4 \\ 6 & 4 & -4 \end{pmatrix}. \quad 252. A = \begin{pmatrix} 8 & 15 & -36 \\ 8 & 21 & -46 \\ 5 & 12 & -27 \end{pmatrix}.$$

$$253. A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}. \quad 254. A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

## 1.7. Квадратичні форми

Вираз  $f = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j$  називається квадратичною формою. Для того щоб вона була додатно визначеною, необхідно і достатньо, щоб всі її головні мінори були додатні.

**Приклад 14.** Знаходження всіх значень параметра  $\lambda$ , при яких додатно визначеною є квадратична форма

$$f(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^2 + x_2^2 + \lambda x_3^2 + 4x_1 x_2 - 2x_1 x_3 - 2x_2 x_3.$$

Складемо матрицю квадратичної форми  $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{pmatrix}.$

Її головні мінори:

$$5 > 0; \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0; \begin{vmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda - 2 > 0; \lambda > 2.$$

Для зведення квадратичної форми до канонічного вигляду використовують лінійне перетворення:

$$\begin{aligned} x_1 &= q_{11}y_1 + q_{12}y_2 + \dots + q_{1n}y_n \\ &\vdots \\ x_n &= q_{n1}y_1 + q_{n2}y_2 + \dots + q_{nn}y_n \end{aligned}$$

з ортогональной матрицей  $Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ q_{n1} & q_{n2} & \cdots & q_{nn} \end{pmatrix}$

Для побудови ортогональної матриці  $Q$  треба побудувати ортогональну систему векторів  $\vec{b}$ , для якої  $\vec{b}_i \vec{b}_j = 0$ , коли  $i \neq j$ .

**Приклад 15.** Ортогоналізувати матрицю лінійного перетворення  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

Нехай  $\vec{a}_1 = (1, 0, 1)$ ,  $\vec{a}_2 = (2, 2, 1)$ ,  $\vec{a}_3 = (-1, -1, 1)$ . Покладемо згідно з правилами ортогоналізації векторів

$$\vec{b}_1 = \vec{a}_1, \quad \vec{b}_2 = \vec{a}_2 + \alpha_1 \vec{a}_1,$$

$$\text{де } \alpha_1 = -\frac{\vec{a}_2 \cdot \vec{b}_1}{(\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_1)} = -\frac{3}{2}; \quad \vec{b}_2 = \left(\frac{1}{2}; 2; -\frac{1}{2}\right); \quad \vec{b}_3 = \vec{a}_3 + \alpha_1 \vec{b}_1 + \alpha_2 \vec{b}_2;$$

$$\alpha_1 = -\frac{\vec{a}_3 \cdot \vec{b}_1}{\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_1} = 0; \quad \alpha_2 = -\frac{\vec{a}_3 \cdot \vec{b}_2}{\vec{b}_2 \cdot \vec{b}_2} = \frac{2}{3} \quad \text{и} \quad \vec{b}_3 = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right).$$

Вектори  $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$  утворюють ортогональну систему, а матриця

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 2 & \frac{1}{3} \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \text{ є ортогональною.}$$

**Приклад 16.** Знайти лінійне перетворення з ортогональною матрицею, що зводить квадратичну форму  $f(x_1, x_2, x_3) = 11x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 + 16x_1x_2 + 4x_1x_3 - 20x_2x_3$  до канонічного вигляду.

Побудуємо матрицю квадратичної форми:  $A = \begin{pmatrix} 11 & 8 & 2 \\ 8 & 5 & -10 \\ 2 & -10 & 2 \end{pmatrix}$

і знайдемо її характеристичне рівняння:  $|A - E\lambda| = -\lambda^3 + 18\lambda^2 + 81\lambda - 1458 = 0$ , звідки  $\lambda_1 = 9, \lambda_2 = -9, \lambda_3 = 18$ .

Побудуємо для кожного власного числа власний вектор:

$$\lambda_1 = 9. \quad \begin{cases} 2x_1 + 8x_2 + 2x_3 = 0; \\ 8x_1 - 4x_2 - 10x_3 = 0; \end{cases} \quad \vec{b}_1 = (-2, 1, -2).$$

$$\lambda_2 = -9. \quad \begin{cases} 20x_1 + 8x_2 + 2x_3 = 0; \\ 8x_1 + 14x_2 - 10x_3 = 0; \end{cases} \quad \vec{b}_2 = (1, -2, -2).$$

$$\lambda_3 = 18. \quad \begin{cases} -7x_1 + 8x_2 + 2x_3 = 0; \\ 2x_1 - 10x_2 - 16x_3 = 0; \end{cases} \quad \vec{b}_3 = (-2, -2, 1).$$

Ортогоналізуємо систему векторів  $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ ;  $\vec{a}_1 = \vec{b}_1$ ;  $\vec{a}_2 = \vec{b}_2 + \alpha_1 \vec{b}_1$ ;

$$\alpha_1 = \frac{(\vec{b}_2, \vec{a}_1)}{\vec{a}_1, \vec{a}_1} = 0; \quad \vec{a}_2 = (1, -2, -2); \quad \vec{a}_3 = \vec{b}_3 = (-2, -2, 1). \text{ Матриця } Q \text{ ліній-}$$

ного перетворення має вигляд:  $Q = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ , оберненою до

неї буде матриця  $Q^{-1} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ . Лінійним перетворенням,

що зводить  $f(x_1, x_2, x_3)$  до канонічного вигляду, є:

$$x_1 = \frac{1}{9}(2y_1 - y_2 + 2y_3); x_2 = \frac{1}{9}(-y_1, 2y_2 + 2y_3);$$

$$x_3 = \frac{1}{9}(2y_1 + 2y_2 - y_3). \quad f(y_1, y_2, y_3) = 9y_1^2 - 9y_2^2 + 18y_3^2.$$

Для зведення двох квадратичних форм до найпростішого вигляду — однієї до нормального, а другої — до канонічного — треба, щоб принаймні одна з них була додатно визначеною. Тоді лінійне перетворення, яке є суперпозицією перетворень з матрицею  $T$ , що зводить додатно визначену квадратичну форму до нормального вигляду, і лінійне перетворення з ортогональною матрицею  $Q$ , що зводить другу квадратичну форму до канонічного вигляду, зводить одночасно дві форми до найпростішого вигляду. Матриця цього перетворення знаходиться за формулою  $A = TQ$ .

**Приклад 17.** Знайти лінійне перетворення, що зводить квадратичні форми  $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 26x_2^2 + 10x_1x_2$  і  $g(x_1, x_2) = x_1^2 + 56x_2^2 + 16x_1x_2$  до найпростішого вигляду. Форма  $f(x_1, x_2)$  — додатно визначена.

Зведемо форму  $f(x_1, x_2)$  до нормального вигляду:

$$f(x_1, x_2) = (x_1 + 5x_2)^2 + x_2^2; \quad y_1 = x_1 + 5x_2, \quad y_2 = x_2,$$

або

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}; \quad T = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Лінійне перетворення  $x_1 = y_1 - 5y_2; \quad x_2 = y_2$  зводить форму  $g$  до вигляду  $g(y_1, y_2) = y_1^2 + y_2^2 + 6y_1y_2$ . Її матрицею є:  $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ , а характеристичним рівнянням:  $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda - 8 = 0$ ; звідки  $\lambda_1 = 4$ ;  $\lambda_2 = -2$ .

Знайдемо власні вектори:  $\lambda_1 = 4$ ;  $-x_1 + x_2 = 0$ ;  $\vec{b}_1 = (1, 1)$ .  $\lambda_2 = -2$ ;  $x_1 + x_2 = 0$ ;  $\vec{b}_2 = (1, -1)$ . Вони ортогональні. Нормуючи їх, одержимо:

$$\vec{b}_1^* = \left( \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right); \quad \vec{b}_2^* = \left( \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right).$$

Матриця ортогонального перетворення буде:  $Q = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ .

Знайдемо суперпозицію матриць:

$$A = TQ = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2\sqrt{2}}{2} & \frac{3\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

Лінійне перетворення  $x_1 = -2\sqrt{2}z_1 + 3\sqrt{2}z_2$ ,  $x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}z_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}z_2$  зводить форму  $f(z_1, z_2)$  до вигляду  $f(z_1, z_2) = z_1^2 + z_2^2$ , а форму  $g(z_1, z_2)$  — до вигляду  $g(z_1, z_2) = 4z_1^2 - 2z_2^2$ .

**Завдання** (для підготовки до практичних занять: 255—258, 264; для аудиторних занять: 259, 265, 269, 274, 277, 284; домашні: 260, 266, 267, 270, 275, 278, 285; додаткові: 261—263, 268, 271—273, 276, 279—283, 286, 287).

*Закінchte вирази:*

255. Квадратичною формою називається ...

256. Квадратична форма буде додатно визначеною, якщо ...

257. Як будується лінійне перетворення, що зводить квадратичну форму до канонічного вигляду?

258. Чи можна звести одночасно дві квадратичні форми до найпростішого вигляду?

*Ортогоналізувати базиси:*

|                               |                                |                               |
|-------------------------------|--------------------------------|-------------------------------|
| $\bar{e}_1 = (1, 1, 1);$      | $\bar{e}_1 = (0, -1, 2);$      | $\bar{e}_1 = (2, -1, 0);$     |
| 259. $\bar{e}_2 = (1, 1, 2);$ | 260. $\bar{e}_2 = (1, -2, 0);$ | 261. $\bar{e}_2 = (3, 1, 2);$ |
| $\bar{e}_3 = (1, 2, 3).$      | $\bar{e}_3 = (1, 1, -1).$      | $\bar{e}_3 = (0, 1, 1).$      |

|                                  |                                   |
|----------------------------------|-----------------------------------|
| $\bar{e}_1 = (1, 1, 1, 1);$      | $\bar{e}_1 = (0, 1, -2, 0);$      |
| 262. $\bar{e}_2 = (1, 2, 1, 1);$ | 263. $\bar{e}_2 = (1, -1, 0, 1);$ |
| $\bar{e}_3 = (1, 1, 2, 1);$      | $\bar{e}_3 = (2, -1, 0, 0);$      |
| $\bar{e}_4 = (1, 3, 2, 3).$      | $\bar{e}_4 = (1, 1, -1, 1).$      |

При яких значеннях параметра  $\lambda$  квадратичні форми додатно визначені?

**264.**  $5x_1^2 + x_2^2 + \lambda x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$ .

**265.**  $2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 2x_1x_3$ .

**266.**  $x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$ .

**267.**  $x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 10x_1x_3 + 6x_2x_3$ .

**268.**  $2x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 6x_1x_3 + 2x_2x_3$ .

Знайти нормальний вигляд квадратичної форми:

**269.**  $x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$ .

**270.**  $x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3$ .

**271.**  $x_1^2 - 3x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$ .

**272.**  $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4$ .

**273.**  $x_1^2 + 2x_2^2 + x_4^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_1x_4 + 2x_2x_3 + 2x_2x_4 + 2x_3x_4$ .

Звести квадратичні форми до канонічного вигляду, знайти вираз нових невідомих через старі:

**274.**  $2x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2x_3$ .

**275.**  $3x_1^2 - 2x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_2 - 3x_1x_3 - x_2x_3$ .

**276.**  $\frac{1}{2}x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_4^2 - x_1x_2 + x_2x_3 - x_3x_4$ .

Знайти ортогональне перетворення, що зводить квадратичну форму до канонічного вигляду:

**277.**  $6x_1^2 + 5x_2^2 + 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3$ .

**278.**  $x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 - 6x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3$ .

**279.**  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$ .

**280.**  $x_1^2 - 5x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3$ .

**281.**  $8x_1^2 - 7x_2^2 + 8x_3^2 + 8x_1x_2 - 2x_1x_3 + 8x_2x_3$ .

$$282. \quad 2x_1x_2 - 6x_1x_3 - 6x_2x_4 + 2x_3x_4.$$

$$283. \quad x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 2x_3^2 - 4x_3x_4 - 2x_4^2.$$

Чи зводяться одночасно нижченаведені дві квадратичні форми до найпростішого вигляду? У разі позитивної відповіді знайти лінійне перетворення, що зводить їх до такого вигляду.

$$284. \quad f(x_1, x_2) = -4x_1x_2; \quad g(x_1, x_2) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 4x_2^2.$$

$$285. \quad f(x_1, x_2, x_3) = 8x_1^2 - 28x_2^2 + 14x_3^2 + 16x_1x_2 + 14x_1x_3 + 32x_2x_3;$$

$$g(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_3.$$

$$286. \quad f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2x_1^2 + x_1x_2 + x_1x_3 - 2x_2x_3 + 2x_2x_4;$$

$$g(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{1}{4}x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_4^2 + 2x_2x_4.$$

$$287. \quad f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + \frac{3}{2}x_2^2 - 2x_3^2 + x_4^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3;$$

$$g(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + \frac{5}{4}x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 2x_2x_3.$$


---



### **2.1. Вектори, лінійні операції над векторами**

До лінійних належать такі операції над векторами:

множення вектора на скаляр  $\alpha \in R$ . При цьому одержаний вектор  $\alpha \vec{a}$  геометрично, залежно від величини і знака  $\alpha$ , розтягується, стискається, змінює напрям ( $\alpha < 0$ );

додавання векторів. Дія виконується за правилом паралелограма або трикутника.

Якщо вектор задано в координатній формі, то у разі множення його на скаляр всі координати треба помножити на цей скаляр, а в разі додавання — додати відповідні його координати.

**Завдання** (для підготовки до практичних занять: 288—294; для аудиторних занять: 295, 299, 301; домашні: 296, 298, 300, 302; додаткові: 297, 303).

*Закінchte вирази:*

**288.** Вектором називається ...

**289.** Вектори вважаються рівними, якщо ...

**290.** З векторами виконуються такі лінійні операції: ..., за правилами...

**291.** Лінійні операції над векторами мають такі властивості: ...

**292.** Проекцією вектора на вісь називається ...

**293.** Проекція добутку вектора на скаляр дорівнює ... (довести).

**294.** Проекція суми векторів дорівнює ... (довести).

**295.** Перевірити за допомогою паралелограма, побудованого на векторах  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ , справджуваність таких тотожностей:

$$(\vec{a} + \vec{b}) + (\vec{a} - \vec{b}) = 2\vec{a}; \quad \vec{a} + (\vec{b} - \vec{a}) = \vec{b};$$

$$\left(\vec{a} + \frac{\vec{b}}{2}\right) - \left(\vec{b} + \frac{\vec{a}}{2}\right) = \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b}); \quad \left(\vec{a} + \frac{\vec{b}}{2}\right) + \left(\vec{b} + \frac{\vec{a}}{2}\right) = \frac{3}{2}(\vec{a} + \vec{b}).$$

**296.** На сторонах  $OA$  і  $OB$  прямокутника  $OACB$  відкладено одиничні орти  $\vec{i}$  і  $\vec{j}$ . Виразити через них вектори  $\vec{OA}$ ,  $\vec{AC}$ ,  $\vec{CB}$ ,  $\vec{BO}$ ,  $\vec{OC}$  і  $\vec{BA}$ , якщо довжина  $|OA| = 3$ ,  $|OB| = 4$ .

**297.** Яку особливість у розташуванні повинні мати вектори  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ , щоб виконувались співвідношення:

$$\begin{aligned} 1) \quad |\vec{a} + \vec{b}| &= |\vec{a} - \vec{b}|; & 2) \quad |\vec{a} + \vec{b}| &= |\vec{a}| + |\vec{b}|; \\ 3) \quad |\vec{a} + \vec{b}| &= |\vec{a}| - |\vec{b}|; & 4) \quad |\vec{a} - \vec{b}| &= |\vec{a}| + |\vec{b}|. \end{aligned}$$

**298.** За якої умови, накладеної на вектори  $\vec{p}$  і  $\vec{q}$ , вектор  $\vec{p} + \vec{q}$  ділить кут між ними навпіл?

**299.** Три вектори  $\vec{AB} = \vec{c}$ ,  $\vec{BC} = \vec{a}$ ,  $\vec{CA} = \vec{b}$  є сторонами трикутника. За допомогою векторів  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  виразити медіани трикутника  $\vec{AM}$ ,  $\vec{BN}$ ,  $\vec{CP}$ .

**300.** У рівнобічній трапеції  $OACB$  кут  $BOA = 60^\circ$ ,  $OB = BC = CA = 2$ ,  $M$  і  $N$  — середини сторін  $BC$  і  $AC$ . Виразити вектори  $\vec{AC}$ ,  $\vec{OM}$ ,  $\vec{ON}$ ,  $\vec{MN}$  через  $\vec{p}$  і  $\vec{q}$  — одиничні вектори напрямів  $\vec{OA}$  і  $\vec{OB}$ .

**301.** Сторона  $BC$  трикутника розділена на п'ять рівних частин точками  $D_1, D_2, D_3, D_4$ , які з'єднані з вершиною  $A$ . Вектори  $\vec{AB} = \vec{c}$ ,  $\vec{BC} = \vec{a}$ . Знайти вирази для векторів  $\vec{D_1A}$ ,  $\vec{D_2A}$ ,  $\vec{D_3A}$ ,  $\vec{D_4A}$ .

**302.** В ромбі  $ABCD$  дано діагоналі  $\vec{AC} = \vec{a}$ ,  $\vec{BD} = \vec{b}$ . Розкласти за цими векторами всі вектори, що збігаються зі сторонами ромба:  $\vec{AB}$ ,  $\vec{BC}$ ,  $\vec{CD}$ ,  $\vec{DA}$ .

**303.** У правильному шестикутнику  $ABCDEF$  дано:  $\vec{AB} = \vec{m}$  і  $\vec{AE} = \vec{n}$ . Розкласти за цими векторами вектори  $\vec{AC}$ ,  $\vec{AD}$ ,  $\vec{AF}$ ,  $\vec{EF}$ .

## 2.2. Скалярний, векторний і мішаний добуток векторів

Розв'язуючи задачі, пов'язані з нелінійними операціями з векторами, використовують формули знаходження скалярного добутку векторів:  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi$ ;  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |a| \text{пр}_{\vec{a}} \vec{b} = |b| \text{пр}_{\vec{b}} \vec{a}$ ;  $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$ , кута  $\varphi$  між векторами

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}},$$

умови паралельності  $\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}$  та перпендикулярності  $a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0$  двох векторів.

**Приклад 1.** Обчислити довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах  $\vec{a} = 5\vec{p} + 2\vec{q}$  і  $\vec{b} = \vec{p} - 3\vec{q}$ , якщо відомо, що  $|\vec{p}| = 2\sqrt{2}$ ;  $|\vec{q}| = 3$  і  $\hat{p}\hat{q} = \frac{\pi}{4}$ .

З визначення операції додавання векторів відомо, що одна діагональ паралелограма  $\vec{d}_1 = \vec{a} + \vec{b} = 6\vec{p} - \vec{q}$ , а друга  $\vec{d}_2 = \vec{a} - \vec{b} = 4\vec{p} + 5\vec{q}$ . Довжина довільного вектора визначається за формулою:  $|\vec{a}| = \sqrt{(\vec{a} \cdot \vec{a})}$ . Тоді:

$$\begin{aligned} |d_1| &= \sqrt{(6\vec{p} - \vec{q})^2} = \sqrt{36(\vec{p})^2 - 12\vec{p} \cdot \vec{q} + \vec{q}^2} = \\ &= \sqrt{36(2\sqrt{2})^2 - 12 \cdot 2\sqrt{2} \cdot 3 \cos \frac{\pi}{4} + 9} = 15; \\ |\vec{d}_2| &= \sqrt{(4\vec{p} + 5\vec{q})^2} = \sqrt{16\vec{p}^2 + 40\vec{p} \cdot \vec{q} + 25\vec{q}^2} = \\ &= \sqrt{16 \cdot (2\sqrt{2})^2 + 40 \cdot 2\sqrt{2} \cdot 3 \cos \frac{\pi}{4} + 25 \cdot 9} = \sqrt{593}. \end{aligned}$$

**Приклад 2.** Дано три послідовні вершини паралелограма:  $A(-3; -2; 0)$ ,  $B(3; -3; 1)$ ,  $C(5; 0; 2)$ . Знайти його четверту вершину  $D$  і кут між діагоналями.

Нехай шукана вершина має координати  $D(x, y, z)$ . З умови колінеарності векторів  $\overrightarrow{AD}$  і  $\overrightarrow{BC}$  маємо:  $\frac{x+3}{2} = \frac{y+2}{3} = z$ , або  $x = 2z - 3$ ;  $y = 3z - 2$ . Згідно з властивостями паралелограма  $|\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{BC}|$  або  $\sqrt{4z^2 + 9z^2 + z^2} = \sqrt{14} \Rightarrow z = 1$ ;  $x = -1$ ;  $y = 1$ ;  $D(-1; 1, 1)$ . Діагоналі паралелограма дорівнюють відповідно сумі і різниці векторів-сторін  $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} = (8; 2; 2)$ ;  $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} = (-4; 4; 0)$ . Кут між діагоналями знайдемо за формулою:

$$\cos \varphi = \frac{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}}{|\overrightarrow{AC}| |\overrightarrow{BD}|} = \frac{-32 + 8}{\sqrt{72} \cdot \sqrt{32}} = -\frac{1}{2}; \text{ отже, } \varphi = 120^\circ.$$

За використання векторного добутку слід пам'ятати, що він некомутативний, а його модуль дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах-множниках. Знаходять векторний добуток за формулою:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

**Приклад 3.** Знайти площу паралелограма, діагоналями якого є вектори  $2\vec{m} - \vec{n}$  і  $4\vec{m} - 5\vec{n}$ , де  $\vec{m}$  і  $\vec{n}$  — одиничні вектори, а кут між ними дорівнює  $45^\circ$ .

Позначимо через  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$  сторони паралелограма, тоді  $\vec{a} + \vec{b} = 2\vec{m} - \vec{n}$ ,  $\vec{a} - \vec{b} = 4\vec{m} - 5\vec{n}$ , звідки  $\vec{a} = 3\vec{m} - 3\vec{n}$ ;  $\vec{b} = -\vec{m} + 2\vec{n}$ . Площу паралелограма знайдемо як модуль векторного добутку  $\vec{a} \times \vec{b}$ .

$$\text{Отже, } S = |(3\vec{m} - 3\vec{n}) \times (-\vec{m} + 2\vec{n})| = 3|m \times n| = 3 \sin 45^\circ = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

**Приклад 4.** Знайти площу і висоту  $BD$  трикутника, вершинами якого є:  $A(1; -2; 8)$ ;  $B(0; 0; 4)$ ;  $C(6; 2; 0)$ .

Знайдемо вектори  $\overrightarrow{AB} = (-1; 2; -4)$  і  $\overrightarrow{AC} = (5; 4; -8)$ . Модуль їх векторного добутку буде дорівнювати подвоєній площі трикутника:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & -4 \\ 5 & 4 & -8 \end{vmatrix} = -28\vec{j} - 14\vec{k}; \text{ звідки } s = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = 7\sqrt{5}.$$

Знайдемо висоту трикутника:  $|\vec{AC}| = \sqrt{105}$ ;  $h = \frac{2s}{|\vec{AC}|} = \frac{2}{3}\sqrt{21}$ .

Геометричний зміст мішаного добутку полягає в тому, що його модуль дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на векторах добутку.

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

У зв'язку з цим його часто використовують для знаходження об'єму і перевірки компланарності трьох векторів.

**Приклад 5.** Для піраміди з вершинами  $O(0; 0; 0)$ ,  $A(5; 2; 0)$ ,  $B(2; 5; 0)$ ,  $C(1; 2; 4)$  обчислити об'єм, площу грані  $ABC$  і висоту, опущену на цю грань.

Знайдемо вектори  $\vec{AO} = (-5; -2; 0)$ ;  $\vec{AB} = (-3; 3; 0)$ ;  $\vec{AC} = (-4; 0; 4)$ .

Модуль мішаного добутку  $|(\vec{AO} \times \vec{AB}) \cdot \vec{AC}| = \begin{vmatrix} -5 & -2 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \\ -4 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 84$

у шість разів більший за об'єм піраміди, побудованої на векторах  $\vec{AO}$ ,  $\vec{AB}$ ,  $\vec{AC}$ , тобто  $V_{\text{пір}} = 14$  куб.од. Для обчислення площі гра-

ні  $ABC$  знайдемо  $|\vec{AB} \times \vec{AC}| = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 3 & 0 \\ -4 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 12\sqrt{3}$ . Тоді  $S_{ABC} = 6\sqrt{3}$ ,

а висота піраміди  $h = \frac{3V}{S} = \frac{7\sqrt{3}}{3}$ .

**Завдання** (для підготовки до практичних занять: 304—319, 334; для аудиторних занять: 321, 323, 333, 342; домашні: 320, 322, 325, 326, 331, 335, 343; додаткові: 324, 332, 336—341, 344).

*Закінchte вирази:*

**304.** Скалярним добутком двох векторів називається ...

**305.** Скалярний добуток векторів має такі властивості: ...

**306.** Кут між двома векторами знаходять за формулою ..., а напрямні косинуси вектора — за формулою ...

307. Умовою перпендикулярності векторів є ...
308. Умовою паралельності векторів є ...
309. Векторним добутком двох векторів називається ...
310. Векторний добуток двох векторів має такі властивості: ...
311. Геометричний зміст векторного добутку полягає в тому, що ...
312. Якщо вектори задано проекціями на осі прямокутної системи координат, то їх векторний добуток записується формулою ...
313. Мішаним добутком трьох векторів називається ...
314. Геометричний зміст мішаного добутку полягає в тому, що ...
315. Якщо вектори задано проекціями на осі прямокутної системи координат, то їх мішаний добуток записується формулою ...
316. Умовою компланарності трьох векторів є ...
317. Мішаний добуток має такі властивості: ...
318. Знайти кут між векторами  $\vec{a} = -\vec{i} + \vec{j}$ ;  $\vec{b} = \vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$ .
319. При якому значенні  $\alpha$  вектори  $\vec{p} = \alpha\vec{a} + 17\vec{b}$  і  $\vec{q} = 3\vec{a} - \vec{b}$  будуть перпендикулярними, якщо  $|\vec{a}| = 2$ ,  $|\vec{b}| = 5$ ,  $(\vec{a} \vec{b}) = \frac{2\pi}{3}$ .
320. Визначити кути трикутника з вершинами  $A(2; -1; 3)$ ,  $B(1; 1; 1)$  і  $C(0; 0; 5)$ .
321. У трикутнику з вершинами  $O(0; 0)$ ,  $A(2; 0)$ ,  $B(1; -1)$  знайти кут, утворений стороною  $OB$  і медіаною  $OM$ .
322. Який кут утворюють одиничні вектори  $\vec{s}$  і  $\vec{t}$ , якщо вектори  $\vec{p} = \vec{s} + 2\vec{t}$  і  $\vec{q} = 5\vec{s} - 4\vec{t}$  взаємно перпендикулярні?
323. Знайти проекцію вектора  $\vec{a} = 10\vec{m} + 2\vec{n}$  на вісь, що має напрям вектора  $\vec{b} = 5\vec{m} - 12\vec{n}$ , де  $\vec{m}$  і  $\vec{n}$  взаємно перпендикулярні орти. Обчислити кути між віссю проекції і ортами  $\vec{m}$  та  $\vec{n}$ .
324. Знайти кут між діагоналями паралелограма, побудованого на векторах  $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j}$ ;  $\vec{b} = -2\vec{j} + \vec{k}$ .
325. Обчислити  $(\vec{a} - \vec{b})^2$ , якщо  $|\vec{a}| = 2\sqrt{2}$ ;  $|\vec{b}| = 4$ ;  $(\vec{a} \vec{b}) = 135^\circ$ .
326. Дано компланарні вектори  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ , причому  $|\vec{a}| = 3$ ,  $|\vec{b}| = 2$ ,  $|\vec{c}| = 5$ ,  $(\vec{a} \vec{b}) = 60^\circ$  і  $(\vec{b} \vec{c}) = 60^\circ$ .  
Обчислити модуль вектора  $\vec{u} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$ .

327. Задано вектори  $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$  і  $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}$ . Знайти  $\text{pr}_{\vec{b}} \vec{a}$  і  $\text{pr}_{\vec{a}} \vec{b}$ .

328. Обчислити довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах  $\vec{a} = 2\vec{m} + \vec{n}$ ,  $\vec{b} = \vec{m} - 2\vec{n}$ , де  $|\vec{m}| = |\vec{n}| = 1$ ,  $(\vec{m} \wedge \vec{n}) = 60^\circ$ .

329. Дано вектор  $\vec{a} = 2\vec{m} - \vec{n}$ , де  $|\vec{m}| = |\vec{n}| = 1$ ,  $(\vec{m} \wedge \vec{n}) = 120^\circ$ . Знайти  $\cos(\vec{a} \wedge \vec{m})$  і  $\cos(\vec{a} \wedge \vec{n})$ .

330. Дано точки  $A(3; -3; -2)$ ;  $B(0; -3; 4)$ ;  $C(0; -3; 0)$ ;  $D(0; 2; -4)$ . Побудувати вектори  $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$  і  $\overrightarrow{CD} = \vec{b}$  та знайти  $\text{pr}_{\vec{a}} \vec{b}$ .

331. Визначити кут між бісектрисами двох плоских кутів правильного тетраедра, які проведені з однієї вершини.

332. З вершини прямокутника зі сторонами 6 і 4 проведено прямі, що ділять протилежні сторони навпіл. Знайти кут між ними.

333. Обчислити площу і висоту паралелограма, побудованого на векторах  $\vec{a} = 2\vec{j} + \vec{k}$ ,  $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{k}$ .

334. Розкрити дужки і спростити вирази:

- 1)  $\vec{i} \times (\vec{j} + \vec{k}) - \vec{j} \times (\vec{i} + \vec{k}) + \vec{k} \times (\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$ ;
- 2)  $(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \times \vec{c} + (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \times \vec{b} + (\vec{b} - \vec{c}) \times \vec{a}$ ;
- 3)  $(2\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{c} - \vec{a}) + (\vec{b} + \vec{c}) \times (\vec{a} + \vec{b})$ ;
- 4)  $2\vec{i} \times (\vec{j} \times \vec{k}) + 3\vec{j} \times (\vec{i} \times \vec{k}) + 4\vec{k} \times (\vec{i} \times \vec{j})$ .

335. Вектори  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$  утворюють кут, що дорівнює  $45^\circ$ . Знайти площу і одну з висот трикутника, побудованого на векторах  $\vec{a} - 2\vec{b}$  і  $3\vec{a} + 2\vec{b}$ , якщо  $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 5$ .

336. Обчислити висоту  $AD$  і площу трикутника з вершинами в точках  $A(7; 3; 4)$ ,  $B(1; 0; 6)$  і  $C(4; 5; -2)$ .

337. Обчислити синус кута між діагоналями паралелограма, побудованого на векторах  $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ ,  $\vec{b} = \vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$ .

338. Обчислити проекцію вектора  $\vec{a} = 3\vec{i} - 12\vec{j} + 4\vec{k}$  на напрям вектора  $\vec{b} = (\vec{j} - 2\vec{k}) \times (\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k})$ .

**339.** Знайти об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах  $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$ ,  $\vec{b} = -3\vec{j} + \vec{k}$ ,  $\vec{c} = 2\vec{j} + 5\vec{k}$ .

**340.** Чи знаходяться точки  $A(2; -1; -2)$ ,  $B(1; 2; 1)$ ,  $C(2; 3; 0)$ ,  $D(5; 0; -6)$  в одній площині?

**341.** Довести, що:

$$1) (\vec{a} + \vec{b})((\vec{a} + \vec{c}) \cdot \vec{b}) = -\vec{a} \cdot (\vec{b} \cdot \vec{c}),$$

$$2) (\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c}) \times ((\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b} - \vec{c})) = 3\vec{a}(\vec{b} \cdot \vec{c}).$$

**342.** Знайти об'єм тетраедра, побудованого на векторах  $\vec{OA}$ ,  $\vec{OB}$ ,  $\vec{OC}$ , якщо ці вектори направлені за бісектрисами координатних кутів і довжина кожного з них дорівнює 2.

**343.** Дано піраміду з вершинами  $A(2; 0; 0)$ ,  $B(0; 3; 0)$ ,  $C(0; 0; 3)$  і  $D(2; 3; 8)$ . Обчислити її об'єм і висоту, опущену на грань  $ABC$ .

**344.** Довести, що при будь-яких  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  вектори  $\vec{a} - \vec{b}$ ,  $\vec{b} - \vec{c}$ ,  $\vec{c} - \vec{a}$  компланарні.

### 2.3. Елементарні задачі аналітичної геометрії

До елементарних належать задачі: визначення відстані між двома точками  $M_1(x_1, y_1)$ ,  $M_2(x_2, y_2)$  за формулою:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2};$$

знаходження координат точки  $M(x, y)$ , що поділяє відрізок

$M_1M_2$  у відношенні  $\lambda$ , за формулами:  $x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}$ ;  $y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$  і

обчислення площі трикутника, заданого координатами вершин

$$A(x_1, y_2); B(x_2, y_2); C(x_3, y_3), \text{ за формулою: } S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

**Приклад 6.** Знайти довжину бісектриси  $AE$  і площу трикутника  $ABC$ , якщо  $A(-2; 0)$ ,  $B(6; 6)$  і  $C(1; -4)$ .

Використовуючи щойно наведену формулу, знайдемо площу

трикутника  $S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 6 & 6 & 1 \\ 1 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 7$  кв. од. Використовуючи власти-

вість бісектриси  $\left( \frac{AC}{AB} = \frac{CE}{BE} \right)$ , знайдемо відношення  $\lambda$ , у якому точ-

ка  $E$  поділяє відрізок  $CB$ ;  $\lambda = \frac{CE}{BE} = \frac{1}{2}$ . Знайдемо координати точки

$$E(x, y): x = \frac{1+3}{1+\frac{1}{2}} = \frac{8}{3}; y = \frac{-4+3}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}; E\left(\frac{8}{3}; \frac{2}{3}\right).$$

$$\text{Отже, } AE = \sqrt{\left(\frac{8}{3} + 2\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{10\sqrt{2}}{3}.$$

**Завдання** (для підготовки до практичних занять: 345—350, 356; для аудиторних занять: 351, 354, 357, 362; домашні: 352, 355, 356, 358, 363; додаткові: 353, 359, 360, 361, 364, 366).

### *Закінchte вирази:*

**345.** Відстань між двома точками на площині знаходять за формулою ...

**346.** Координати точки, що поділяє відрізок у заданому відношенні, знаходять за формулами: ... Вивести ці формули.

**347.** Площу трикутника, заданого координатами вершин, обчислюють за формулою: ...

**348.** Умову того, що три точки лежать на одній прямій, можна записати у вигляді: ...

**349.** Дано вершини трикутника  $A(3; 2)$ ,  $B(-1; -1)$ ,  $C(11; 6)$ . Визначити довжини його сторін.

**350.** Довести, що трикутник з вершинами  $A(0; 0)$ ,  $B(3; 1)$ ,  $C(1; 7)$  прямокутний.

**351.** На осі ординат знайти точки, що віддалені від точки  $A(4; -6)$  на відстані 5 одиниць.

**352.** На осі  $OX$  знайти точку, рівновіддалену від початку координат і від точки  $A(9; -3)$ .

**353.** Якій умові мають задовільняти координати точки  $M(x, y)$ , якщо вона рівновіддалена від точок  $A(7; -3)$  і  $B(-2; 1)$ ?

**354.** Знаючи координати двох протилежних вершин ромба  $A(8; -3)$  та  $C(10; 11)$  і довжину сторони  $AB = 10$ , визначити координати решти вершин.

**355.** Обчислити довжину медіан трикутника  $ABC$ , якщо  $A(3; -2)$ ,  $B(5; 2)$ ,  $C(-1; 4)$ .

**356.** Знайти вершини трикутника, знаючи середини його сторін  $D(3; -2)$ ,  $E(1; 6)$ ,  $F(-4; 2)$ .

**357.** Дано координати двох суміжних вершин паралелограма  $A\left(-4\frac{1}{2}; -7\right)$ ,  $B(2; 6)$  і точку перетину його діагоналей  $M\left(3; 1\frac{1}{2}\right)$ . Знайти координати решти вершин.

**358.** Дано три вершини паралелограма:  $A(4; 2)$ ,  $B(5; 7)$ ,  $C(-3; 4)$ . Знайти координати четвертої вершини  $D$ , що протилежна вершині  $B$ .

**359.** Відрізок між точками  $A(3; 2)$  і  $B(15; 6)$  поділено на п'ять рівних частин. Знайти координати точок поділу.

**360.** На промені, що виходить з початку системи координат і проходить через точку  $M(4; 3)$ , знайти точку  $P$ , відстань якої від початку координат дорівнює 9 одиницям.

**361.** Знайти точку перетину медіан трикутника, якщо координатами його вершин є:  $(1; 4)$ ,  $(-5; 0)$  і  $(-2; -1)$ .

**362.** Дано трикутник з вершинами  $A(4; 1)$ ,  $B(7; 5)$ ,  $C(-4; 7)$ . Знайти точку перетину бісектриси кута  $A$  зі стороною  $BC$ .

**363.** Обчислити периметр і площу трикутника за координатами його вершин:  $(-2; 1)$ ,  $(2; -2)$  і  $(8; 6)$ .

**364.** Обчислити площу п'ятикутника, вершинами якого є точки  $A(-2; 0)$ ,  $B(0; -1)$ ,  $C(2; 0)$ ,  $D(3; 2)$  і  $E(-1; 3)$ .

**365.** Які з точок лежать на одній прямій?

1)  $(0; 5)$ ,  $(2; 1)$ ,  $(-1; 7)$ ;

2)  $(0; 2)$ ,  $(-1; 5)$ ,  $(3; 4)$ ;

3)  $(3; 1)$ ,  $(-2; -9)$ ,  $(8; 11)$ .

**366.** Дано точки  $A(1; 9)$ ,  $B(4; 7)$ ,  $C(2; 8)$ ,  $D(-1; 4)$ . Перевірити, чи є чотирикутник  $ABCD$  паралелограмом і обчислити довжини його висот.

## 2.4. Пряма лінія на площині

Геометричним образом лінійного рівняння  $Ax + By + C = 0$  є пряма на площині. Змінні  $x$  та  $y$ , що входять до рівняння, — це координати множини точок, що лежать на цій прямій. Якщо поділити рівняння прямої на один з відмінних від нуля коефіцієнтів  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , то це рівняння буде залежати від двох параметрів, що визначають розміщення лінії відносно прямокутної системи координат.

Наприклад, якщо поділимо на  $B \neq 0$ , то одержимо рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом:  $y = kx + b$ , де  $k = \operatorname{tg} \alpha$ ,  $\alpha$  — кут нахилу прямої до осі  $OX$ ,  $b$  — відрізок, що відтинає пряма на осі  $OY$ .

Рівняння  $y - y_0 = k(x - x_0)$ , де  $(x_0, y_0)$  — координати точки, що лежить на прямій, описує множину прямих, що проходять через задану точку.

Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки  $(x_1, y_1)$  та  $(x_2, y_2)$ , можна записати у вигляді:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

Якщо рівняння прямої подати у вигляді

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

то параметри  $a, b$  визначають відрізки, що відтинає пряма на відповідних осях системи координат.

Кут між двома прямими  $y = k_1x + b_1$  і  $y = k_2x + b_2$  знаходять за формулою:  $\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 \cdot k_1}$ , з якої можна одержати умову паралельності ( $k_1 = k_2$ ) і перпендикулярності

$\left( k_2 = -\frac{1}{k_1} \right)$  двох прямих.

Відстань від точки  $M_0(x_0, y_0)$  до прямої  $Ax + By + C = 0$  обчислюють за формулою:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

**Приклад 7.** Дано рівняння сторін  $AB$  ( $x - 3y + 3 = 0$ ) і  $AC$  ( $x + 3y + 3 = 0$ ) трикутника  $ABC$ . Точка  $D(-1; 3)$  — основа висоти  $AD$ . Записати рівняння медіани  $AM$ , бісектриси  $AF$  і висоти  $AD$  трикутника, а також знайти кут  $A$ .

Знайдемо координати вершини  $A$ . Для цього розв'яжемо систему рівнянь:  $\begin{cases} x - 3y + 3 = 0 \\ x + 3y + 3 = 0 \end{cases}$ ,  $A(-3; 0)$ .

Запишемо рівняння висоти  $AD$ , використовуючи рівняння прямої, що проходить через дві точки  $\frac{x+3}{-1+3} = \frac{y}{3}$  або  $y = \frac{3}{2}x + \frac{9}{2}$ .

Використовуючи умову перпендикулярності  $\left(k_2 = -\frac{1}{k_1}\right)$ , знайдемо кутовий коефіцієнт сторони  $BC$  трикутника:  $k_2 = -\frac{2}{3}$ . Тоді рівняння сторони  $BC$  можна записати так:  $y - 3 = -\frac{2}{3}(x + 1)$ ; або  $2x + 3y - 7 = 0$ . Знайдемо координати вершин  $B$  і  $C$  трикутника, розв'язавши відповідно системи рівнянь:

$$\begin{cases} x - 3y + 3 = 0; \\ 2x + 3y - 7 = 0 \end{cases} \quad \text{і} \quad \begin{cases} x + 3y + 3 = 0; \\ 2x + 3y - 7 = 0. \end{cases}$$

Одержимо:  $B\left(\frac{4}{3}; \frac{13}{9}\right)$ ;  $C\left(10; -\frac{13}{3}\right)$ . Основа медіани — це середина відрізка  $BC$ ;  $M\left(\frac{17}{3}; \frac{13}{9}\right)$ . Використовуючи рівняння прямої, що проходить через дві точки, одержимо рівняння медіани:  $3x - 18y - 43 = 0$ . Знайдемо довжини сторін  $AB = \frac{13\sqrt{10}}{9}$ ;  $AC = \frac{13}{9}\sqrt{82}$ . Тоді обчислимо відношення, у якому основа бісектриси поділяє сторону  $BC$ :  $\lambda = \frac{AC}{AB} = \sqrt{\frac{41}{5}}$ .

За формулами  $x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}$ ;  $y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$  знайдемо координати основи бісектриси  $F\left(\frac{30\sqrt{5} + 4\sqrt{41}}{3(\sqrt{5} + \sqrt{41})}; \frac{-13(4\sqrt{5} - \sqrt{41})}{9(\sqrt{5} + \sqrt{41})}\right)$ . Рівняння бісект-

риси запишемо як рівняння прямої, що проходить через задані точки:

$$\frac{x+3}{3(39\sqrt{5}+7\sqrt{41})} = \frac{-y}{13(4\sqrt{5}-\sqrt{41})}. \text{ Для знаходження кута } A \text{ визначимо}$$

кутові коефіцієнти прямої  $AC$  —  $k_1 = -\frac{1}{3}$  і прямої  $AB$  —  $k_2 = \frac{1}{3}$ .

$$\text{Тоді } \operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} = \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{9}} = \frac{3}{5}; \quad \varphi = \arctg \frac{3}{5}.$$

**Приклад 8.** Дано трикутник  $A(1; 2)$ ,  $B(3; 7)$ ,  $C(5; -13)$ . Знайти відстань від вершини  $B$  до медіани, що проходить через точку  $A$ .

Знайдемо координати основи медіани:  $x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{3+5}{2} = 4$ ;

$y = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{7-13}{2} = -3$ . Запишемо рівняння медіани як прямої,

що проходить через дві задані точки:  $\frac{x-1}{4-1} = \frac{y-2}{-3-2}$ , або

$5x + 3y - 11 = 0$ . Відстань від точки  $B(3; 7)$  до медіани знайдемо за

$$\text{формулою: } d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|5 \cdot 3 + 3 \cdot 7 - 11|}{\sqrt{25+9}} = \frac{25}{\sqrt{34}}.$$

**Приклад 9.** Знайти координати точки, що розташована на віддалі 5 одиниць від прямої  $3x + 4y - 10 = 0$  і прямої  $5x - 12y + 26 = 0$ .

Нехай  $(x, y)$  — координати шуканої точки, тоді маємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{|3x+4y-10|}{\sqrt{9+16}} = 5; \\ \frac{|5x-12y+26|}{\sqrt{25+144}} = 5; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1) \begin{cases} 3x+4y=35; \\ 5x-12y=39; \end{cases} \\ 2) \begin{cases} 3x+4y=35; \\ 5x-12y=-91; \end{cases} \end{cases} \begin{cases} 3) \begin{cases} 3x-4y=-15; \\ 5x-12y=39; \end{cases} \\ 4) \begin{cases} 3x-4y=-15; \\ 5x-12y=-91. \end{cases} \end{cases}$$

Отже, точок буде чотири:  $A\left(\frac{72}{7}; \frac{29}{28}\right)$ ;  $B(1; 8)$ ;  $C(-21; -12)$ ;

$$D\left(-\frac{23}{2}; -\frac{39}{8}\right).$$

**Приклад 10.** Скласти рівняння бісектрис кутів, утворених двома прямими  $2x - 9y + 18 = 0$  і  $6x + 7y - 21 = 0$ .

Бісектриса є множиною точок, рівновіддалених від сторін кута. Нехай  $M(x, y)$  — одна з точок цієї множини. Тоді, прирівнюючи відстані від цієї точки до прямих, маємо:

$$\frac{|2x - 9y + 18|}{\sqrt{4 + 81}} = \frac{|6x + 7y - 21|}{\sqrt{36 + 49}} \Rightarrow |2x - 9y + 18| = |6x + 7y - 21|.$$

З останнього рівняння маємо рівняння двох бісектрис у вигляді:  $4x + 16y - 39 = 0$  і  $8x - 2y - 3 = 0$ . Слід зазначити, що бісектриси

взаємно перпендикулярні:  $k_1 = -\frac{1}{4}$ ;  $k_2 = 4$ .

**Завдання** (для підготовки до практичних занять: 367—379; для аудиторних занять: 381, 386, 388, 392, 397; домашні: 380, 382, 384, 387, 393, 398; додаткові: 383, 385, 389—391, 394—396, 399—403).

**367.** Вивести рівняння прямої на площині з кутовим коефіцієнтом.

**368.** Вивести рівняння прямої, що проходить через задану точку з заданим кутовим коефіцієнтом.

**369.** Вивести рівняння прямої, що проходить через дві задані точки.

*Закінchte вирази:*

**370.** Вивести формулу знаходження кута між двома прямими.

**371.** Геометричний зміст кутового коефіцієнта полягає в тому, що ...

**372.** Якщо дві прямі паралельні, то ...

**373.** Якщо дві прямі перпендикулярні, то ...

**374.** Загальне рівняння прямої на площині має вигляд: ...

**375.** Геометричний зміст коефіцієнтів  $A$ ,  $B$  в загальному рівнянні полягає в тому, що ...

**376.** Відстань від точки до прямої можна знайти за формулою: ...

**377.** Написати рівняння перпендикулярів до прямої  $2x - 5y - 10 = 0$  в точках її перетину з осями системи координат.

**378.** У трикутнику з вершинами  $A(-2; 0)$ ,  $B(2; 6)$ ,  $C(4; 2)$  проведено висота  $BD$  і медіана  $BM$ . Написати рівняння сторони  $AC$ , медіани  $BM$  і висоти  $BD$ .

**379.** Написати рівняння прямої, що проходить через початок системи координат і: 1) паралельна прямій  $y = 4x + 3$ ; 2) перпендикулярна прямій  $y = \frac{1}{2}x + 1$ ; 3) утворює кут, що дорівнює  $45^\circ$ , з прямою  $y = 2x + 5$ ; 4) нахилена під кутом в  $60^\circ$  до прямої  $y = x - 1$ .

**380.** Визначити вершини і кути трикутника, сторони якого задано рівняннями:  $x + 3y = 0$ ;  $x = 3$ ;  $x - 2y + 3 = 0$ .

**381.** Рівняння бічних сторін рівнобедреного трикутника —  $y = 3$  та  $x - y + 4 = 0$ . Скласти рівняння третьої сторони, якщо вона проходить через початок системи координат.

**382.** Скласти рівняння катетів рівнобедреного прямокутного трикутника, якщо  $y = 3x + 5$  — рівняння гіпотенузи, а  $C(4; -1)$  — вершина прямого кута.

**383.** Знайти точки перетину медіан і висот трикутника з вершинами в точках:  $A(-4; 2)$ ,  $B(2; -5)$  і  $C(5; 0)$ .

**384.** Написати рівняння прямих, що проходять через вершини трикутника  $A(-1; 2)$ ,  $B(3; -1)$ ,  $C(0; 4)$  і паралельні його сторонам.

**385.** Скласти рівняння сторін трикутника, якщо  $A(3; 5)$ ,  $B(6; 1)$  — його вершини, а  $M(4; 0)$  — точка перетину медіан.

**386.** Скласти рівняння катетів прямокутного трикутника, якщо гіпотенуза збігається з віссю  $OX$ , площа його дорівнює 20 кв. од., а  $C(-1; 4)$  — вершина прямого кута.

**387.** Знайти відстані точок  $A(4; 3)$ ,  $B(2; 1)$ ,  $C(1; 0)$  від прямої  $3x + 4y - 10 = 0$ .

**388.** Знайти відстань між прямими  $2x - 3y - 6 = 0$  і  $4x - 6y - 25 = 0$ .

**389.** Написати рівняння тих прямих, що паралельні прямій  $4x - 3y - 12 = 0$  і знаходяться на відстані 5 одиниць від точки  $(2; 3)$ .

**390.** Написати рівняння геометричного місця точок, віддалених від прямої  $4x - 3y = 0$  на 4 одиниці.

**391.** Написати рівняння бісектрис кутів між прямими:

1)  $2x + 3y = 10$  і  $3x + 2y = 10$ ;

2)  $3x + 4y = 0$  і  $y = 0$ .

**392.** На осі ординат знайти точку, рівновіддалену від початку координат і прямої  $3x - 4y + 12 = 0$ .

**393.** Знайти кутовий коефіцієнт прямої, що проходить через точку  $A(-2; 1)$  на відстані 4 одиниць від точки  $B(3; 1)$ .

**394.** Скласти рівняння прямої, паралельної прямим  $4x - 6y - 3 = 0$  і  $2x - 3y + 7 = 0$ , що проходить посередині між ними.

**395.** Через початок системи координат і точку  $(1; 3)$  проходять дві паралельні прямі. Написати їх рівняння, якщо відомо, що відстань між ними дорівнює  $\sqrt{5}$  одиниць.

**396.** Дві сторони паралелограма задано рівняннями  $y = x - 2$  і  $5y = x + 6$ . Діагоналі його перетинаються в початку системи координат. Написати рівняння двох інших сторін і діагоналей.

**397.** Сторони  $AB$  і  $BC$  паралелограма задані рівняннями  $2x - y = -5$  і  $x - 2y = -4$ , діагоналі його перетинаються в точці  $M(1; 4)$ . Знайти довжини його висот.

**398.** Знайти координати вершин ромба, якщо рівняння його сторін:  $x + 2y = 4$  і  $x + 2y = 10$ , а рівняння однієї з діагоналей —  $y = x + 2$ .

**399.** Скласти рівняння сторін трикутника, одна з вершин якого  $A(3; -4)$ , а рівняння висот —  $7x - 2y - 1 = 0$ ,  $2x - 7y - 6 = 0$ .

**400.** Дано дві вершини трикутника:  $A(2; -3)$ ,  $B(5; 1)$ , рівняння сторони  $BC$ :  $x + 2y - 7 = 0$  і медіани  $AM$ :  $5x - y - 13 = 0$ . Скласти рівняння висоти, що проходить через вершину  $C$ , і обчислити її довжину.

**401.** Скласти рівняння сторін трикутника, одна з вершин якого  $A(-4; 2)$ , а рівняння медіан —  $3x - 2y + 2 = 0$  і  $3x + 5y - 12 = 0$ .

**402.** Скласти рівняння сторін трикутника, одна з вершин якого  $A(2; -4)$ , а рівняння бісектрис його кутів —  $x + y - 2 = 0$  і  $x - 3y - 6 = 0$ .

**403.** Дано дві вершини трикутника  $A(-4; 3)$ ,  $B(4; -1)$  і точку перетину висот  $M(3; 3)$ . Знайти вершину  $C$ .

## 2.5. Криві другого порядку

До кривих другого порядку належать: коло, еліпс, гіпербола, парабола. У загальному випадку їм відповідає рівняння:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$$

Шляхом перетворення системи координат із загального рівняння можна одержати канонічні рівняння кривих другого порядку:

кола:  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ , де  $a, b$  — координати центра кола, а  $R$  — радіус кола;

еліпса:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , де  $a, b$  — півосі еліпса;

гіперболи:  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ , де  $a$  — дійсна,  $b$  — уявна півосі гіперболи;  
параболи:  $y^2 = 2px$ , де  $p$  — параметр параболи.

**Завдання** (для підготовки до практичних занять: 404—420, 423, 430; для аудиторних занять: 421, 426, 432, 442, 454, 459, 464; домашні: 422, 424, 427, 431, 443, 444, 455, 465; додаткові: 425, 428, 429, 433—441, 445—453, 456—458, 460—463, 466—471).

### *Закінchte вирази:*

**404.** Колом називається .... Його канонічне рівняння має вигляд: ...

**405.** Загальне рівняння другого порядку описує коло, якщо виконується співвідношення між коефіцієнтами: ...

**406.** Еліпсом називається .... Його канонічне рівняння має вигляд: ...

**407.** Формула зв'язку між довжинами півосей еліпса і відстанню між фокусами має вигляд: ...

**408.** Ексцентриситет еліпса визначається за формулою: ...

**409.** Геометричний зміст ексцентриситету еліпса полягає в тому, що ...

**410.** Гіперболою називається .... Її канонічне рівняння має вигляд: ...

**411.** Формула зв'язку між довжинами півосей гіперболи і відстанню між фокусами має вигляд: ...

**412.** Рівняння асимптот гіперболи мають вигляд: ...

**413.** Геометричний зміст ексцентриситету гіперболи полягає в тому, що ...

**414.** Параболою називається ... її канонічне рівняння має вигляд: ...

**415.** Геометричний зміст параметра параболи полягає в тому, що ...

**416.** Загальне рівняння кривих другого порядку описує еліпс, якщо між коефіцієнтами виконується співвідношення: ...

**417.** Загальне рівняння кривих другого порядку описує гіперболу, якщо між коефіцієнтами виконується співвідношення: ...

**418.** Загальне рівняння кривих другого порядку описує параболу, якщо між коефіцієнтами виконується співвідношення: ...

**419.** Знайти рівняння кола, якщо відомі координати кінців одного з діаметрів  $AB$ :  $A(1; 4)$ ,  $B(-3; 2)$ .

**420.** Скласти рівняння кола, що проходить через три задані точки:  $A(0; 2)$ ,  $B(1; 1)$ ,  $C(2; -2)$ .

**421.** Визначте центр і радіус кола, що задане рівнянням:  $x^2 + y^2 - 8x + 6y + 21 = 0$ .

**422.** Звести до канонічного вигляду рівняння кіл:

1)  $x^2 + y^2 - 4x = 0$ ;

2)  $x^2 + y^2 + 6y - 7 = 0$ ;

3)  $x^2 + y^2 + 2x - 10y + 1 = 0$ ;

4)  $3x^2 + 3y^2 - 4x - 6y - 15 = 0$ .

**423.** Як перетвориться рівняння кола  $x^2 + y^2 + 2x - 6y - 1 = 0$ , якщо перенести початок системи координат у точку: 1)  $(-1; 3)$  або 2)  $(-4; 3)$ ?

**424.** Скласти рівняння кола, що торкається осі  $OY$  у точці  $A(0; -3)$  і має радіус  $R = 2$ .

**425.** Написати рівняння кола, яке дотикається до осі  $OX$  у точці  $(5; 0)$  і відтинає на осі  $OY$  хорду довжиною в 10 одиниць.

**426.** Скласти рівняння дотичної до кола  $x^2 + y^2 = 5$  в точці  $(1; -2)$ .

**427.** Написати рівняння дотичних, що проведені з початку координат до кола  $x^2 + y^2 - 10x - 4y + 25 = 0$ .

**428.** Знайти кут між радіусами кола  $x^2 + y^2 + 4x - 6y = 0$ , що проведені в точки його перетину з віссю  $OY$ .

**429.** Скласти рівняння прямої, що проходить через центри двох кіл:  $x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0$  і  $x^2 + y^2 + 2x - 12y + 1 = 0$ .

**430.** Дано рівняння еліпса:  $25x^2 + 169y^2 = 4225$ . Обчислити довжини осей, координати фокусів та його ексцентриситет.

**431.** Скласти канонічне рівняння еліпса, коли відомо, що:

1) півосі його дорівнюють 4 і 2 одиницям;

2) відстань між фокусами дорівнює 6, а велика піввісь — 5 одиницям;

3) велика піввісь дорівнює 10 одиницям, а ексцентриситет  $\varepsilon = 0,8$ ;

4) мала піввісь дорівнює 3 одиницям, а ексцентриситет

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

5) сума півосей дорівнює 8, а відстань між фокусами — також 8 одиницям.

**432.** На еліпсі  $\frac{x^2}{30} + \frac{y^2}{24} = 1$  визначте точку, що знаходиться на відстані 5 одиниць від малої осі.

**433.** Еліпс проходить через точки  $M(\sqrt{3}; -2)$  і  $N(-2\sqrt{3}; 1)$ . Скласти його канонічне рівняння.

**434.** В еліпс  $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1$  вписано правильний трикутник, одна з вершин якого збігається з правою вершиною великої півосі. Знайти координати двох інших вершин трикутника.

**435.** На еліпсі  $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$  знайти точку, відстань якої від правого фокуса в чотири рази більша за відстань від лівого фокуса.

**436.** Дано еліпс  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ . Через точку  $(1; 1)$  провести хорду, що поділяється в цій точці навпіл.

**437.** Знайти рівняння прямої, що дотикається до еліпса  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$  в точці  $(2; -3)$ .

**438.** Скласти рівняння дотичних, що проведені з точки  $A(-6; 3)$  до еліпса  $\frac{x^2}{15} + \frac{y^2}{9} = 1$ .

**439.** Знайти ті дотичні до еліпса  $\frac{x^2}{30} + \frac{y^2}{24} = 1$ , які паралельні прямій  $2x - y + 17 = 0$ .

**440.** Знайти рівняння тих дотичних до еліпса  $3x^2 + 8y^2 = 45$ , відстань яких від центра еліпса дорівнює 3 одиницям.

**441.** Написати рівняння дотичної до еліпса  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ , відношення відстаней якої від двох фокусів дорівнює 9.

**442.** Знаючи рівняння асимптот гіперболи  $y = \pm \frac{1}{2}x$  і одну з точок на гіперболі  $M(12; 3\sqrt{3})$ , скласти рівняння гіперболи.

**443.** Написати рівняння гіперболи, що проходить через фокуси еліпса  $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{144} = 1$ , а її фокуси знаходяться в вершинах цього еліпса.

**444.** Знайти кут між асимптотами гіперболи, у якої ексцентриситет дорівнює 2.

**445.** Обчислити ексцентриситет гіперболи, якщо кут між асимптотами дорівнює: 1)  $60^\circ$ , 2)  $90^\circ$ .

**446.** На гіперболі  $\frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{16} = 1$  знайти точку, відстань якої від однієї асимптоти у три рази більша за відстань до другої асимптоти.

**447.** Знайти точки перетину гіперболи  $\frac{x^2}{90} - \frac{y^2}{36} = 1$  з прямими:

1)  $x - 5y = 0$ ;      2)  $2x + y - 18 = 0$ ;      3)  $x - y + 5 = 0$ .

**448.** Через точку  $A(3; -1)$  провести хорду гіперболи  $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ , що поділяється цією точкою навпіл.

**449.** Написати рівняння прямої, що дотикається до гіперболи  $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$  в точці  $(5; -4)$ .

**450.** Скласти рівняння дотичних до гіперболи  $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{9} = 1$ , які проходять через кожен з таких точок:  $(2; 0)$ ,  $(-4; 3)$ ,  $(5; -1)$ .

**451.** На гіперболі  $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{9} = 1$  знайти точки, дотичні в яких нахилені до осі  $OX$  під кутом  $\frac{\pi}{3}$ .

**452.** Скласти рівняння гіперболи, знаючи рівняння її асимптот:  $y = \pm \frac{1}{4}x$  і рівняння однієї з дотичних:  $5x - 6y - 8 = 0$ .

**453.** Знайти умову, за якої пряма  $Ax + By + C = 0$  дотикається до гіперболи  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ .

**454.** Обчислити довжину сторін правильного трикутника, вписаного в параболу  $y^2 = 2px$ .

**455.** Через точку  $A(2; 1)$  провести таку хорду параболи  $y^2 = 4x$ , яка поділялася б цією точкою навпіл.

**456.** Через точку  $P(5; -7)$  провести дотичну до параболи  $y^2 = 8x$ .

**457.** Знайти умову, за якої пряма  $y = kx + b$  дотикається до параболи  $y^2 = 2px$ .

**458.** Дано параболу  $y^2 = 12x$ . Провести до неї дотичну: 1) паралельно прямій  $3x - y + 5 = 0$ ; 2) перпендикулярно до прямої  $2x + y - 7 = 0$ ; 3) що утворює з прямою  $4x - 2y + 9 = 0$  кут  $45^\circ$ .

**459.** Знайти найкоротшу відстань параболи  $y^2 = 64x$  до прямої  $4x + 3y + 46 = 0$ .

**460.** Обчислити параметр параболи  $y^2 = 2px$ , якщо відомо, що вона дотикається до прямої  $x - 2y + 5 = 0$ .

**461.** Через фокус параболи  $y^2 = -4x$  проведено пряму під кутом  $120^\circ$  до осі  $OX$ . Записати рівняння прямої і знайти довжину хорди, що утворилася.

**462.** Якого вигляду набуде рівняння кривої  $x^2 - 4xy + 3y^2 - 2x + 1 = 0$ , якщо перенести початок системи координат у точку  $O(1; 0)$ ?

**463.** Записати перетворене рівняння кривої  $x^2 + 6x - 8y + 1 = 0$ , якщо початок координат буде перенесено в точку  $(-3; -1)$ .

Визначити типи кривих другого порядку:

**464.**  $x^2 + 6xy + y^2 + 6x + 2y - 1 = 0$ .

**465.**  $3x^2 - 2xy + 3y^2 + 4x + 4y - 4 = 0$ .

**466.**  $x^2 - 4xy + 3y^2 + 2x - 2y = 0$ .

**467.**  $y^2 + 5xy - 14x^2 = 0$ .

**468.**  $x^2 - xy - y^2 - x - y = 0$ .

**469.**  $x^2 - 4xy + 4y^2 + 2x - 2y - 1 = 0$ .

**470.** Які криві задаються рівнянням  $x^2 - 2xy + \lambda y^2 - 4x - 6y + 3 = 0$  при різних значеннях параметра  $\lambda$ .

**471.** Повернувши осі системи координат на кут  $45^\circ$ , спростити рівняння: 1)  $5x^2 - 6xy + 5y^2 = 32$ ; 2)  $3x^2 - 10xy + 3y^2 + 32 = 0$ . Побудувати старі і нові осі системи координат.

## 2.6. Площина і пряма у просторі

Будь-яке рівняння першого степеня відносно координат точки простору  $Ax + Bx + Cz + D = 0$  відображає площину. Коефіцієнти при змінних  $A, B, C$  є компонентами вектора, перпендикулярного до площини.

Кут між двома площинами  $Ax + By + Cz + D = 0$  і  $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$  визначається за формулою:

$$\cos \varphi = \frac{AA_1 + BB_1 + CC_1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}}.$$

Умовою їх паралельності є:  $\frac{A}{A_1} = \frac{B}{B_1} = \frac{C}{C_1}$ , а перпендикулярності —  $AA_1 + BB_1 + CC_1 = 0$ . Відстань від точки  $A(x_0, y_0, z_0)$  до площини можна знайти за формулою:  $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$ .

Пряма у просторі може бути визначена як перетин двох площин:

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0; \\ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \end{cases}$$

або канонічним рівнянням:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p},$$

де  $\vec{s} = (m, n, p)$  — напрямний вектор прямої,  $M(x_0, y_0, z_0)$  — точка, що лежить на прямій.

Пряму у просторі можна задати також параметричним рівнянням:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt; \\ y = y_0 + nt; \\ z = z_0 + pt, \end{cases}$$

де  $t$  — параметр, або рівнянням прямої, що проходить через дві задані точки  $M_1(x_1, y_1, z_1)$  і  $M_2(x_2, y_2, z_2)$ :

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Звичайно, всі рівняння відповідають прямій у просторі і між ними існує певний зв'язок.

Площина і пряма у просторі можуть перетинатися під деяким кутом  $\alpha$ , який визначається за формулою:

$$\sin \alpha = \frac{Am + Bn + Cp}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}.$$

У разі виконання умови:  $Am + Bn + Cp = 0$  пряма і площина паралельні, а якщо  $\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}$  — перпендикулярні. Умовою того, що пряма лежить на площині, є виконання співвідношень:

$$\begin{cases} Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0; \\ Am + Bn + Cp = 0. \end{cases}$$

**Приклад 11.** Скласти рівняння площини, що проходить через вісь  $OZ$  і утворює з площиною  $2x + y - \sqrt{5}z = 0$  кут  $60^\circ$ , і знаходження її відстані до точки  $A(1; 3; 5)$ .

Рівняння шуканої площини можна записати у вигляді  $Ax + By = 0$ , тому що вона проходить через вісь  $OZ$ . Використаємо другу умову задачі:  $\cos 60^\circ = \frac{1}{2} = \frac{2A+B}{\sqrt{A^2+B^2} \cdot \sqrt{10}}$ , з якої одержимо

рівняння:  $3\frac{A^2}{B^2} + 8\frac{A}{B} - 3 = 0$ ;  $\frac{A}{B} = -3$  або  $\frac{A}{B} = \frac{1}{3}$ . Остаточного маємо, що умовам задачі задовольняють дві площини:  $3x - y = 0$  і  $x + 3y = 0$ . Точка  $A$  лежить на першій площині, тому що  $d_1 = 0$ , а відстань її до другої площини  $d_2 = \frac{|1+9|}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$ .

**Приклад 12.** Знайти напрямний вектор прямої

$$\begin{cases} x + y - z = 0; \\ x - y = 0 \end{cases}$$

і кути, які вона утворює з осями системи координат.

Вектори  $\vec{N}_1(1; 1; -1)$  і  $\vec{N}_2(1; -1; 0)$  перпендикулярні до відповідних площин, що задають рівняння прямої, тому напрямний вектор прямої  $\vec{s}$  розташований перпендикулярно до кожного з векторів  $\vec{N}_1, \vec{N}_2$ . Згідно з означенням векторного добутку векторів

$$\vec{s} = \vec{N}_1 \times \vec{N}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}.$$

Тобто:  $\vec{s} = (-1; -1; -2)$  або  $\vec{s} = (1; 1; 2)$ . Кути з осями знайдемо за формулами:  $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{6}}$ ;  $\cos \beta = \frac{1}{\sqrt{6}}$ ;  $\cos \gamma = \frac{2}{\sqrt{6}}$ .

**Приклад 13.** Показати, що прямі

$$\begin{cases} x - z + 2 = 0; \\ y - 2z - 1 = 0 \end{cases} \text{ і } \frac{x-2}{3} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-2}{1}$$

перетинаються, і написати рівняння площини, в якій вони розташовані.

Дві прямі будуть лежати на одній площині, коли їх напрямні вектори  $\vec{s}_1$  і  $\vec{s}_2$  і вектор  $\overrightarrow{M_1M_2}$  будуть компланарними. Точка  $M_1(-2; 1; 0)$  лежить на першій прямій, а  $M_2(2; 4; 2)$  — на другій. Вектор  $\overrightarrow{M_1M_2} = (4; 3; 2)$ . Напрямний вектор  $\vec{s}_1 = \vec{N}_1 \times \vec{N}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} =$

$$= \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}; \quad \vec{s}_2 = (3; 1; 1). \quad (\vec{s}_1 \times \vec{s}_2) \cdot \overrightarrow{M_1M_2} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0. \quad \text{Отже, прямі}$$

лежать на одній площині. Для запису рівняння цієї площини знайдемо вектор  $\vec{N} = \vec{s}_1 \times \vec{s}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} + 2\vec{j} - 5\vec{k}$ . Точка  $M_1(-2; 1; 0)$

лежить на цій площині. Отже, маємо:  $x + 2 + 2(y - 1) - 5z = 0$  або остаточно:  $x + 2y - 5z = 0$ .

**Завдання** (для підготовки до практичних занять: 472—491, 493, 494, 508, 510, 512, 523; для аудиторних занять: 492, 495, 501, 519, 524, 529; домашні: 496, 497, 500, 513—515, 530; додаткові: 498, 499, 502—507, 509, 511, 516—518, 520—522, 525—528, 531—538).

### Закінchte вирази:

472. Загальне рівняння площини в просторі має вигляд: ...
473. Вектор  $\vec{N} = (A, B, C)$  направлений ...
474. Якщо одна з проєкцій вектора  $\vec{N}$  на вісь системи координат дорівнює нулю, то ...
475. Якщо дві проєкції вектора  $\vec{N}$  на осі системи координат дорівнюють нулю, то ...
476. Кут між двома площинами знаходиться за формулою: ...
477. Умовою перпендикулярності двох площин є ...
478. Умовою паралельності двох площин є ...
479. Нормальне рівняння площини має вигляд: ...
480. Відстань від точки до площини знаходиться за формулою: ...
481. Загальне рівняння прямої у просторі має вигляд: ...
482. Канонічне рівняння прямої у просторі має вигляд: ...

- 483.** Параметричне рівняння прямої у просторі має вигляд: ...
- 484.** Рівняння прямої у просторі, що проходить через дві задані точки, має вигляд: ...
- 485.** Кут між двома прямими у просторі визначається за формулою: ...
- 486.** Кут між прямою у просторі і площиною знаходиться за формулою: ...
- 487.** Умова паралельності прямої і площини, має вигляд: ...
- 488.** Умова перпендикулярності прямої і площини має вигляд: ...
- 489.** Умова того, що пряма лежить на площині, має вигляд: ...
- 490.** Точка перетину прямої і площини знаходиться за формулою: ...
- 491.** Написати рівняння площини, що проходить через точки  $M_1(0; 1; 3)$ ;  $M_2(2; 4; 5)$ ;  $M_3(1, -2, 1)$ .
- 492.** Написати рівняння площини, що проходить через точку  $M(-4; 0; 4)$  і відтинає на осях  $OX$  і  $OY$  відповідно відрізки  $a = 4$ ;  $b = 3$ .
- 493.** Через точку  $M(-1; 2; 3)$  проведено площину перпендикулярно до  $\overrightarrow{OM}$ . Написати її рівняння.
- 494.** Знайдіть кут між площинами:
- 1)  $x - 2y + 2z - 8 = 0$  і  $x + z - 6 = 0$ ;
  - 2)  $x + 2z - 6 = 0$  і  $x + 2y - 4 = 0$ .
- 495.** Написати рівняння площини, що проходить через точку  $(-1; -1; 2)$  і перпендикулярна до площини  $x - 2y + z - 4 = 0$  і  $x + 2y - 2z + 4 = 0$ .
- 496.** Знайти рівняння площини, що проходить через точку  $(2; 2; -2)$  і паралельна до площини  $x - 2y - 3z = 0$ .
- 497.** Написати рівняння площини, що проходить через точки  $M_1(-1; -2; 0)$  і  $M_2(1; 1; 2)$  і перпендикулярна до площини  $x + 2y + 2z - 4 = 0$ .
- 498.** Знайти рівняння площини, що проходить через точки  $O(0; 0; 0)$ ,  $A(3; -2; 1)$  і  $B(1; 4; 0)$ .
- 499.** Знайти кут між площиною  $x - y + \sqrt{2}z - 5 = 0$  і координатною площиною  $Oyz$ .
- 500.** Обчислити відстані:
- 1) точки  $(3; 1; -1)$  до площини  $22x + 4y - 20z - 45 = 0$ ;
  - 2) точки  $(4; 3; -2)$  до площини  $3x - y + 5z + 1 = 0$ ;
  - 3) точки  $\left(2; 0; -\frac{1}{2}\right)$  до площини  $4x - 4y + 2z + 17 = 0$ .

**501.** Обчислити висоту піраміди, опущену з вершини  $S$ , якщо  $S(0; 6; 4)$ ,  $A(3; 5; 3)$ ,  $B(-2; 11; -5)$ ,  $C(1; -1; 4)$ .

**502.** Скласти рівняння площини, якщо вона віддалена від точок  $A(6; 1; -1)$ ,  $B(0; 5; 4)$  і  $C(5; 2; 0)$  відповідно на відстані  $d_1 = 1$ ,  $d_2 = 3$ ,  $d_3 = 0$ .

**503.** Знайти рівняння площин, що поділяють навпіл двогранні кути між площинами  $3x - y + 7z - 4 = 0$  і  $5x + 3y - 5z + 2 = 0$ .

**504.** На осі  $OZ$  знайти точку, рівновіддалену від двох площин:  $x + 4y - 3z - 2 = 0$  і  $5x + z + 8 = 0$ .

**505.** Обчислити відстань між площинами  $11x - 2y - 10z + 15 = 0$  і  $11x - 2y - 10z - 45 = 0$ .

**506.** Через лінію перетину площин  $4x - y + 3z - 1 = 0$  і  $x + 5y - z + 12 = 0$  провести площину, що: 1) проходить через точку  $(1; 1; 1)$ , 2) паралельна осі  $OY$ , 3) перпендикулярна до площини  $2x - y + 5z - 3 = 0$ .

**507.** На відстані 3 одиниць від площини  $3x - 6y - 2z + 14 = 0$  провести паралельну їй площину.

**508.** Знайти точки перетину прямої  $\begin{cases} 6x + 2y - z - 9 = 0; \\ 3x + 2y + 2z - 12 = 0 \end{cases}$  з координатними площинами.

**509.** Скласти рівняння ребер тетраедра, якщо його вершинами є:  $A(0; 0; 2)$ ,  $B(4; 0; 5)$ ,  $C(5; 3; 0)$ ,  $D(-1; 4; -2)$ .

**510.** Перевірити, чи лежать точки  $(3; 0; 1)$ ,  $(0; 2; 4)$ ,  $\left(1; \frac{4}{3}; 3\right)$  на одній прямій.

**511.** Визначити напрямні косинуси прямих:

$$1) \frac{x-1}{4} = \frac{y-5}{-3} = \frac{z+2}{12}; \quad 2) \frac{x}{12} = \frac{y-7}{9} = \frac{z+3}{20}.$$

**512.** Визначити кут між прямими  $\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{6} = \frac{z-5}{2}$  і  $\frac{x}{2} = \frac{y-3}{9} = \frac{z+1}{6}$ .

**513.** Звести до канонічного вигляду загальне рівняння прямої  $\begin{cases} 2x - 3y - 3z - 9 = 0; \\ x - 2y + z + 3 = 0. \end{cases}$

**514.** Обчислити напрямні косинуси прямої  $\begin{cases} 5x - 6y + 2z + 21 = 0; \\ x - z + 3 = 0. \end{cases}$

**515.** Через точку  $(2; -5; 3)$  провести пряму:

1) паралельно прямій  $\frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{-6} = \frac{z+3}{9}$ ;

2) паралельно прямій  $\begin{cases} 2x - y + 3z - 1 = 0; \\ 5x + 4y - z - 7 = 0. \end{cases}$

**516.** У площині  $Oxz$  знайти пряму, що проходить через початок системи координат і перпендикулярна до прямої  $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-5}{1}$ .

**517.** Чи перетинаються прямі:

1)  $\frac{x-1}{2} = \frac{y-7}{1} = \frac{z-5}{5}$  і  $\frac{x-6}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{1}$ ;

2)  $\begin{cases} 4x + z - 1 = 0; \\ x - 2y + 3 = 0 \end{cases}$  і  $\begin{cases} 3x + y - z + 4 = 0; \\ y + 2z - 8 = 0 \end{cases}$ ?

**518.** Написати рівняння перпендикуляра, проведеного від точки  $(2; 3; 1)$  до прямої  $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-2}{3}$ .

**519.** З початку системи координат опустіть перпендикуляр на пряму  $\frac{x-5}{4} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+1}{-2}$ .

**520.** Через точку  $A(4; 0; -1)$  провести пряму так, щоб вона перетинала дві прямі:  $\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{4} = \frac{z-5}{3}$  і  $\frac{x}{5} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{2}$ .

**521.** Знайти відстань від точки  $O(0; 0; 0)$  до прямої  $\frac{x+1}{3} = \frac{y+2}{-4} = \frac{z-1}{-5}$ .

**522.** Знайти відстань між паралельними прямими  $\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+3}{2}$  і  $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{2}$ .

**523.** Довести, що пряма  $\frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-3}{3}$  паралельна площині  $2x + y - z = 0$ , а пряма  $\frac{x+1}{2} = \frac{x+1}{-1} = \frac{z+3}{3}$  лежить на цій площині.

**524.** Написати рівняння площини, що проходить через пряму  $\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+1}{3}$  і точку  $(3; 4; 0)$ .

525. Написати рівняння площини, що проходить через дві паралельні прямі:  $\frac{x-3}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{2}$  і  $\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{2}$ .

526. Написати рівняння прямої, що проходить через початок системи координат і утворює однакові кути з площинами  $3x-4y=0$ ,  $y=0$ ;  $z=0$ . Знайти цей кут.

527. Знайти точку перетину прямої  $x=2t-1$ ,  $y=t+2$ ,  $z=1-t$  з площиною  $3x-2y+z=3$ .

528. Знайти точку перетину прямої  $\frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{2}$  з площиною  $x+2y+3z-29=0$ .

529. Знайти проекцію точки  $(3; 1; -1)$  на площину  $x+2y+3z-30=0$ .

530. Знайти проекцію точки  $(2; 3; 4)$  на пряму  $x=y=z$ .

531. Написати рівняння перпендикуляра, опущеного з точки  $(2; 1; 0)$  на пряму  $\begin{cases} x-3z+1=0; \\ y-2z=0. \end{cases}$

532. Через пряму  $\frac{x-2}{5} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+1}{2}$  провести площину, перпендикулярну до площини  $x+4y-3z+7=0$ .

533. Знайти проекцію прямої  $\frac{x}{4} = \frac{y-4}{3} = \frac{z+1}{-2}$  на площину  $x-y+3z+8=0$ .

534. Провести площину, що проходить через перпендикуляри, опущені з точки  $(-3; 2; 5)$  на площини  $4x+y-3z+13=0$  і  $x-2y+z-11=0$ .

535. Через пряму  $\frac{x+5}{3} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{4}$  провести площину паралельно площині  $x+y-z+15=0$ .

536. На прямій  $\frac{x}{1} = \frac{y+7}{2} = \frac{z-3}{-1}$  знайти точку, найближчу до точки  $(3; 2; 6)$ .

537. На прямій  $\begin{cases} x+2y+z=1; \\ 3x-y+4z=29 \end{cases}$  знайти точку, рівновіддалену від точок  $A(3; 11; 4)$ ,  $B(-5; -13; -2)$ .

538. Знайти точку, симетричну точці  $(4; 3; 10)$  відносно прямої  $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{5}$ .

## 2.7. Поверхні другого порядку

Канонічні рівняння, що описують відповідні поверхні другого порядку, мають вигляд:

еліпсоїд —  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ , при  $a = b = c$  — сфера;

односмуговий гіперболоїд —  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ ;

двосмуговий гіперболоїд —  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$ ;

конус —  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ ;

еліптичний циліндр —  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ;

гіперболічний циліндр —  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ;

еліптичний параболоїд —  $z = \frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q}$ ;

гіперболічний циліндр —  $z = \frac{x^2}{2p}$  або  $z = \frac{y^2}{2q}$ .

**Завдання** (для підготовки до практичних занять: 545, 546; для аудиторних занять: 539, 542, 547; домашні: 540, 543, 548; додаткові: 541, 544, 549, 550).

**539.** Знайти проекцію на площину  $z = 0$  перерізу кульової поверхні  $x^2 + y^2 + z^2 - 4(x - 2y - 2z) = 0$  площиною, що проходить через центр кулі і перпендикулярна до прямої  $\begin{cases} x = 0; \\ y + z = 0. \end{cases}$

**540.** Написати рівняння циліндричної поверхні з твірною, яка паралельна вектору  $\vec{m} = (1; 1; 1)$ , а напрямна задана системою рівнянь:  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4x; \\ z = 0. \end{cases}$

**541.** Знайти рівняння канонічної поверхні з вершиною в початку координат і напрямною  $\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2; \\ z = c. \end{cases}$

542. Знайти вершину конуса  $x^2 + (y - a)^2 - z^2 = 0$  і його напрямну в площині  $z = a$ .

543. Написати рівняння конічної поверхні з вершиною  $O(0; 0; 0)$  і напрямною  $\begin{cases} x^2 + (y - 6)^2 + z^2 = 25; \\ y = 3. \end{cases}$

544. Довести, що переріз конуса  $z^2 = xy$  площиною  $x + y = 2a$  є еліпсом, і знайти його півосі.

545. Написати рівняння поверхні, утвореної обертанням еліпса  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, y = 0$  навколо осі  $OZ$ .

546. Знайти твірні гіперболоїда  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{36} = 1$ , що проходять через точку  $(4; 1; -3)$ .

547. Визначити тип поверхні  $x^2 - y^2 = 4z$  і знайти її твірні, що проходять через точку  $(3; 1; 2)$ .

548. Написати рівняння прямолінійних твірних гіперболоїда  $x^2 - y^2 + z^2 = 4$ , що проходять через точку  $(2; 4; 4)$ .

549. Знайти найменший круговий переріз гіперболоїда  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} - \frac{3z^2}{25} = 1$ .

550. Написати рівняння прямолінійних твірних гіперболічного параболоїда  $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 2z$ , що проходять через точку  $(4; 3; 0)$ .

---

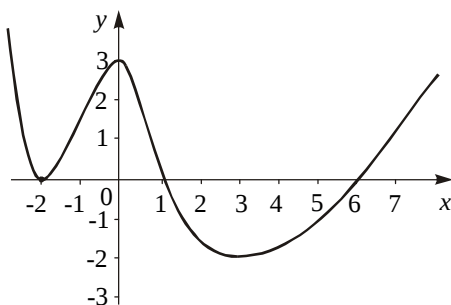
**3.1. Функції**

**Завдання** (для підготовки до практичних занять: 551—565; для аудиторних занять: 566 (10—12), 570 (1), 571, 572 (1); домашні: 566 (1—9), 567, 570 (3,4), 572 (2—4); додаткові: 568, 569, 573, 574).

- 551. Сформулювати означення функції.
- 552. Сформулювати означення послідовності.
- 553. Перелічити основні елементарні функції.

*Закінchte вирази:*

- 554. Областю визначення функції називається ...
- 555. Функція називається парною, якщо ...
- 556. Функція називається непарною, якщо ...
- 557. Функція називається періодичною, якщо ...
- 558. Функція називається зростаючою, якщо ...
- 559. Функція називається спадаючою, якщо ...
- 560. Функція називається елементарною, якщо ...
- 561. Нехай відомий графік функції  $y = f(x)$ . Чим будуть відрізнятися від початкового графіки:  $f(x+a)$ ,  $f(x)+b$ ,  $f(ax)$ ,  $af(x)$ ,  $f(|x|)$ ,  $|f(x)|$ ,  $|f(|x|)|$ ?
- 562. Функцію задано графіком, зображеним на рисунку:



*Визначити:*

- а) при яких значеннях  $x$  функція дорівнює нулю;  
б) при яких значеннях  $x$  функція додатна;  
в) при яких значеннях  $x$  функція від'ємна;  
г) кількість значень  $x$ , при яких  $f(x)=1$ ,  $f(x)=-4$ ,  $f(x)=-1$ .

**563.**  $y = z^2$ ,  $z = x + 1$ . Утворити складну функцію  $y(x)$ .

**564.**  $y = \sin x$ ,  $z = \ln y$ ,  $u = \sqrt{1 - z^2}$ . Утворіть складну функцію  $u(x)$ .

**565.** Записати у явному вигляді функцію  $y(x)$ , неявно задану рівняннями:

- |                                   |                                |
|-----------------------------------|--------------------------------|
| 1) $x^2 + y^2 = 1$ ;              | 2) $xy = a$ ;                  |
| 3) $2^{xy} = 5$ ;                 | 4) $\ln x + \ln(y + 1) = 4$ ;  |
| 5) $2^{x+y}(x^2 - 2) = x^3 + 7$ ; | 6) $(1 + x)\cos y - x^2 = 0$ . |

**566.** Знайти область визначення функцій:

- |                                                  |                                             |
|--------------------------------------------------|---------------------------------------------|
| 1) $y = \sqrt{5 - 2x}$ ;                         | 2) $y = \frac{1}{x^2 - 1}$ ;                |
| 3) $y = \frac{2x}{x^2 - 3x + 2}$ ;               | 4) $y = \arcsin \frac{x}{4}$ ;              |
| 5) $y = \arccos(1 - 2x)$ ;                       | 6) $y = \sqrt{1 -  x }$ ;                   |
| 7) $y = \ln \sin x$ ;                            | 8) $y = \arccos \frac{2}{2 + \sin x}$ ;     |
| 9) $y = \log_x 2$ ;                              | 10) $y = \sqrt{\sin x} + \sqrt{16 - x^2}$ ; |
| 11) $y = \ln \cos x + \frac{1}{\sqrt{\sin x}}$ ; | 12) $y = (x^2 + x + 1)^{\frac{3}{2}}$ .     |

**567.** Визначіть інтервали знакосталості функцій:

- 1)  $y = x^2 - 5x + 6$ ;    2)  $y = 2^{x-1}$ ;    3)  $y = |x - 1| - 2$ .

**568.** Знайти за графіком найбільше і найменше значення дробово раціональної функції в заданому інтервалі:

- 1)  $y = \frac{4}{x}$ ;  $x \in [1; 5]$ ;    2)  $y = \frac{x}{2x - 5}$ ;  $x \in [-1; 2]$ ;  
3)  $y = \frac{1 - x}{1 + x}$ ;  $x \in [0; 4]$ .

**569.** Побудувати графіки дробово раціональних функцій, використовуючи графік функції  $y = \frac{k}{x}$ :

$$1) y = \frac{x-1}{x-2}; \quad 2) y = \frac{2x}{3-x}; \quad 3) y = \frac{2x-5}{3x-7,5}.$$

**570.** Визначити період коливань функцій:

$$1) y = \sin 3x; \quad 2) y = 5 \cos 2x;$$

$$3) y = 2 \sin \frac{x}{2}; \quad 4) y = \sin \frac{3\pi x}{4}.$$

**571.** Побудувати графік функції

$$y = \begin{cases} \cos x, & -\pi \leq x \leq 0; \\ 1, & 0 < x < 1; \\ \frac{1}{x}, & 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

Чи є вона елементарною?

**572.** Графічно розв'язати рівняння:

$$1) x = 2 \sin x; \quad 2) x = \operatorname{tg} x;$$

$$3) 4 \sin x = 4 - x; \quad 4) 2^{-x} = \cos x.$$

**573.** Побудувати фігуру, обмежену лініями  $y = 2^x$ ,  $y = \frac{1+x}{x}$ ,  $x = 3$ . За графіком наближено знайти точки перетину цих ліній.

**574.** Написати рівняння параболи, симетричної відносно осі  $OY$ , що проходить через точки  $A(-3; 0)$ ,  $B(0; 5)$ .

### 3.2. Границя послідовності і функції

Для кращого розуміння означення границі послідовності розглянемо приклади:

**Приклад.** Використовуючи означення границі послідовності довести, що  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1$ .

Згідно з означенням границі послідовності для довільного  $\varepsilon > 0$  треба знайти такий номер елемента послідовності  $N$ , що для

всіх  $n > N$  виконувалася б нерівність  $\left| \frac{n+1}{n} - 1 \right| < \varepsilon$ . Нехай вибрано  $\varepsilon > 0$ , за цим  $\varepsilon$  розглянемо  $N = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil + 1$ , тоді  $N > \frac{1}{\varepsilon}$  і для будь-якого  $n > N$  маємо:  $\left| \frac{n+1}{n} - 1 \right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon$ .

Проілюструємо одержаний результат табличкою:

|               |     |     |      |       |        |     |
|---------------|-----|-----|------|-------|--------|-----|
| $\varepsilon$ | 0,5 | 0,1 | 0,01 | 0,001 | 0,0001 | ... |
| $N$           | 3   | 11  | 101  | 1001  | 10001  | ... |

Тоді при  $\varepsilon = 0,5$ , починаючи з  $N = 3$ , відповідні  $n$  можна брати з послідовності 4, 5, ... Для них  $\frac{1}{n} < \frac{1}{3}$ . Якщо  $\varepsilon = 0,001$ , а  $N = 1001$ , то тепер  $n$  можна брати з послідовності 1002, 1003, ... і знову нерівність  $\frac{1}{n} < \frac{1}{1001}$  виконується. Отже, для будь-якого навіть нескінченно малого значення  $\varepsilon$  можна знайти  $N$ , що для всіх  $n > N$  нерівність  $\left| \frac{n+1}{n} - 1 \right| < \varepsilon$  виконується. Це й означає, що  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1$ .

**Приклад.** Використовуючи означення границі функції, довести, що  $\lim_{x \rightarrow 1} (3x - 2) = 1$ .

Згідно з означенням границі функції для будь-якого  $\varepsilon > 0$  треба знайти таке  $\delta > 0$ , що для тих  $x$ , для яких виконується нерівність  $|x - 1| < \delta$ , виконується й нерівність  $|3x - 2 - 1| < \varepsilon$ . Нехай вибрано деяке  $\varepsilon > 0$ , за ним знайдемо  $\delta < \frac{\varepsilon}{3}$ . Тоді  $|x - 1| < \delta < \frac{\varepsilon}{3}$ .

Повернемося до нерівності:  $|3x - 3| = 3|x - 1| < 3\delta < 3 \cdot \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$ . Тобто доведено, що  $\lim_{x \rightarrow 1} (3x - 2) = 1$ .

З наведених прикладів зрозуміло, що завдання знаходження границі послідовності і функції з використанням означення досить складне. Формально для знаходження границі треба у вираз функції підставити число, до якого прямує  $x$ . Якщо в результаті

підстановки одержується число, то воно дорівнює границі функції, але, як правило, за такої підстановки одержують так звану невизначеність вигляду:  $\frac{\infty}{\infty}$ ,  $\frac{0}{0}$ ,  $\infty - \infty$ ,  $1^\infty$ ,  $0^0$ ,  $0^\infty$  і т. п. Для розкриття невизначеності дещо перетворюють вираз функції, що стоїть під знаком границі, і використовують відповідні теореми теорії границь або одну з особливих границь.

**Приклади.** Знаходження границь:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 7^{n+2}}{3 - 7^n} = \left( \frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{7^n} + 49}{\frac{3}{7^n} - 1} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{7^n} + 49 \right)}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{3}{7^n} - 1 \right)} = -49.$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{x+1}}{x} = \left( \frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (x+1)}{x(1 + \sqrt{x+1})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{x(1 + \sqrt{x+1})} = -\frac{1}{2}.$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{1}{x-2} - \frac{4}{x^2-4} \right) = (\infty - \infty) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-4} = \left( \frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{4}.$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} = (0 \cdot \infty) = \left| \begin{array}{ll} 1-x=y; & x=1-y \\ x \rightarrow 1 & y \rightarrow 0 \end{array} \right| = \lim_{y \rightarrow 0} y \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2} - \frac{y}{2} \right) =$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} y \frac{\cos \frac{\pi y}{2}}{\sin \frac{\pi y}{2}} = \lim_{y \rightarrow 0} \cos \frac{\pi y}{2} \cdot \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\sin \frac{\pi y}{2}} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\frac{\pi}{2} y \cdot \frac{2}{\pi}}{\sin \frac{\pi}{2} y} = \frac{2}{\pi} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\frac{\pi}{2} y}{\sin \frac{\pi}{2} y} = \frac{2}{\pi}.$$

$$5) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sqrt{2x^2+1} - \sqrt{x^2+1} \right) = (\infty - \infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2+1 - (x^2+1)}{\sqrt{2x^2+1} + \sqrt{x^2+1}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{\sqrt{2x^2+1} + \sqrt{x^2+1}} = \left( \frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{2 + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = \infty.$$

$$6) \lim_{t \rightarrow \infty} \left( \frac{t-3}{t+2} \right)^{2t+1} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{5}{t+2} \right)^{2t+1} = (1^\infty) = \left| \begin{array}{ll} x = \frac{-5}{t+2} & t = \frac{-5}{x} - 2 \\ t \rightarrow \infty, & x \rightarrow 0 \end{array} \right| =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{-\frac{10}{x}-3} = \left( \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} \right)^{-10} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{-3} = e^{-10}.$$

$$\begin{aligned}
 7) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x} &= (1^\infty) = \left| \operatorname{tg} x = 1 + y; \quad \operatorname{tg} 2x = \frac{-2(y+1)}{y(y+2)} \right| = \\
 &= \lim_{y \rightarrow 0} (1+y)^{\frac{-2(y+1)}{y(y+2)}} = \lim_{y \rightarrow 0} \left( (1+y)^{\frac{1}{y}} \right)^{\frac{-2(y+1)}{y+2}} = e^{-\lim_{y \rightarrow 0} \frac{2y+1}{y+2}} = e^{-1}.
 \end{aligned}$$

**Завдання** (для підготовки до практичних занять: 575—596, 645—647, 674, 676, 690, 691, 694; для аудиторних занять: 603, 617, 618, 621, 630, 639, 648, 657, 673, 688, 692, 695; домашні: 597—602, 613—616, 619, 622, 631, 632, 640, 650, 658, 677, 689, 693, 696; додаткові: 604—612, 620, 623—629, 633—638, 641—644, 649, 651—656, 659—672, 675, 678—687, 697, 698).

**575.** Сформулювати означення границі послідовності.

**576.** Сформулювати означення границі функції  $f(x)$ , коли  $x \rightarrow x_0$ .

**577.** Сформулювати означення границі функції  $f(x)$ , якщо  $x \rightarrow \infty$ .

**578.** Сформулювати означення границі функції зліва і справа.

**579.** Сформулювати і довести теорему про суму нескінченно малих функцій.

**580.** Сформулювати і довести теорему про добуток нескінченно малої функції на обмежену функцію.

**581.** Сформулювати означення нескінченно великої функції.

*Закінchte вирази:*

**582.** Околом точки називається ...

**583.** Функція називається нескінченно малою, якщо ...

**584.** Якщо нескінченно мала  $\alpha(x)$  вищого порядку відносно нескінченно малої  $\beta(x)$ , то ...

**585.** Якщо  $\alpha(x)$  і  $\beta(x)$  нескінченно малі одного порядку, то ...

**586.** Якщо  $\alpha(x)$  і  $\beta(x)$  еквівалентні нескінченно малі, то ...

**587.** Якщо функція  $f(x)$  має число  $a$  як границю, коли  $x \rightarrow x_0$ , то в околі точки  $x_0$  її можна подати у вигляді ... (довести).

**588.** Сформулювати і довести теорему про єдиність границі.

Якщо функції  $f(x)$  і  $\varphi(x)$  мають границями відповідно числа  $a$  і  $b$ , коли  $x \rightarrow x_0$ , то:

**589.**  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm \varphi(x)) = \dots$  (довести)

**590.**  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot \varphi(x)) = \dots$  (довести)

**591.**  $\lim_{x \rightarrow x_0} \left( \frac{f(x)}{\varphi(x)} \right) = \dots$ ,  $b \neq 0$  (довести)

**592.** Якщо  $\varphi(x) \leq f(x) \leq g(x)$  в околі точки  $x_0$  і  $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = a$  і  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = a$ , то  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ . (довести)

**593.** Якщо  $f(x) > g(x)$  в околі точки  $x_0$ , то:

а)  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ ;

б)  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \geq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ ;

в)  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ . (Знайти правильну відповідь.)

**594.** Довести, що  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ .

**595.** Довести, що  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x = e$ .

**596.** Довести, використовуючи означення границі, що:

1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$ ; 2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$ ; 3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n^3+1} = 0$ .

Знайти границі послідовностей:

**597.**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - 100n^2 + 1}{100n^2 + 15n}$ .

**598.**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^4 - (n-1)^4}{(n+1)^4 + (n-1)^4}$ .

**599.**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)^4 - (n-1)^4}{(2n+1)^4 + (n-1)^4}$ .

**600.**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^3 + 2n - 1}}{n + 2}$ .

**601.**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2 + n}}{n + 1}$ .

**602.**  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ .

**603.**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)! - n!}$ .

**604.**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)! + (n+1)!}{(n+3)!}$ .

$$605. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n}}{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{3^n}}.$$

$$606. \lim_{n \rightarrow \infty} n^2(1 + 2 + 3 + \dots + n).$$

$$607. \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1 + 2 + 3 + \dots + n}{n + 2} - \frac{n}{2} \right). \quad 608. \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1)^n} \right)$$

$$609. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n - 1}{2^n + 1}.$$

$$610. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2^n} - 1}{\frac{1}{2^n} + 1}.$$

$$611. \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n-1}{n^2} \right). \quad 612. \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n} - \frac{2}{n} + \frac{3}{n} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}n}{n} \right)$$

Знайти границі функцій:

$$613. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^3 - x}.$$

$$614. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 3x^2 + 2x}{x^2 - x - 6}.$$

$$615. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)\sqrt{2-x}}{x^2 - 1}.$$

$$616. \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{8x^3 - 1}{6x^2 - 5x + 1}.$$

$$617. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x - 2}{x^3 - x^2 - x + 1}.$$

$$618. \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^2} \right).$$

$$619. \lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{1}{x(x-2)^2} - \frac{1}{x^2 - 3x + 2} \right). \quad 620. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1}; \quad m, n \in \mathbb{Z}.$$

$$621. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + x}{x^4 - 3x^2 + 1}.$$

$$622. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - 5x}{x^2 - 3x + 1}.$$

$$623. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{2x^2 + 1}.$$

$$624. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + x - 3x^3}{1 + x^2 + 3x^3}.$$

$$625. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^3}{x^2 + 1} - x \right).$$

$$626. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^3}{2x^2 - 1} - \frac{x^2}{2x + 1} \right).$$

$$627. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3 + x} - x}.$$

$$628. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt[3]{x^2 + 1}}{\sqrt[4]{x^4 + 1} - \sqrt[5]{x^4 + 1}}.$$

$$629. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^4 + 3} - \sqrt[5]{x^3 + 4}}{\sqrt[3]{x^7} + 1}.$$

$$630. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x^2} - 1}{x}.$$

$$631. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x} - 1}{x^2}.$$

$$632. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{\sqrt{x^2 + 16} - 4}.$$

$$633. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x - 1} - 2}{x - 5}.$$

$$634. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}.$$

$$635. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x + n} - \sqrt{x}}{n}.$$

$$636. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1 + x^2} - 1}{x^2}.$$

$$637. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1 + x} - \sqrt[3]{1 - x}}{x}.$$

$$638. \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x - b} - \sqrt{a - b}}{x^2 - a^2}.$$

$$639. \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x + a} - \sqrt{x}).$$

$$640. \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1}).$$

$$641. \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{(x + 1)^2} - \sqrt[3]{(x - 1)^2}).$$

$$642. \lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{3}{2}} (\sqrt{x^3 + 1} - \sqrt{x^3 - 1}).$$

$$643. \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{3}{1 - \sqrt{x}} - \frac{2}{1 - \sqrt[3]{x}} \right).$$

$$644. \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{(x + a)(x + b)} - x).$$

$$645. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha x}{\sin \beta x}.$$

$$646. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\sin 5x}.$$

$$647. \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha^n}{(\sin \alpha)^m}; \quad m, n \in \mathbb{N}.$$

$$648. \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin mx}{\sin nx}; \quad m, n \in \mathbb{Z}.$$

$$649. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \arcsin x}{3x}.$$

$$650. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}.$$

$$651. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - \arcsin x}{2x + \operatorname{arctg} x}.$$

$$652. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x \sin 2x}.$$

$$653. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt[3]{(1 - \cos x)^2}}.$$

$$654. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \sin x - \cos x}{1 - \sin x - \cos x}.$$

$$655. \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos \alpha)^2}{\operatorname{tg}^3 \alpha - \sin^3 \alpha}.$$

$$656. \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\operatorname{tg} x} \right).$$

$$657. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^2}.$$

$$659. \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{1 - \frac{x^2}{\pi^2}}.$$

$$661. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{\cos 2x}.$$

$$663. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left( 2x \operatorname{tg} x - \frac{\pi}{\cos x} \right).$$

$$665. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos \alpha x - \cos \beta x}{x^2}.$$

$$667. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2} - \sqrt{1 + \cos x}}{\sin^2 x}.$$

$$669. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 - \sin x}}{\operatorname{tg} x}.$$

$$671. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cos 2x \cos 3x}{1 - \cos x}.$$

$$673. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x}{1+x} \right)^x.$$

$$675. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^{\frac{x+1}{x}}.$$

$$677. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+1}{x-2} \right)^{2x-1}.$$

$$679. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2+1}{x^2-1} \right)^{x^2}.$$

$$658. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt[3]{(1 - \sin x)^2}}.$$

$$660. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left( \frac{\pi}{2} - x \right) \operatorname{tg} x.$$

$$662. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\sin \left( x - \frac{\pi}{6} \right)}{\frac{\sqrt{3}}{2} - \cos x}.$$

$$664. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(a+x) - \cos(a-x)}{x}.$$

$$666. \lim_{\alpha \rightarrow \beta} \frac{\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta}{\alpha^2 - \beta^2}.$$

$$668. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(a+2x) - 2\sin(a+x) + \sin a}{x^2}.$$

$$670. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \sqrt{\cos 2x}}{x^2}.$$

$$672. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin \left( x - \frac{\pi}{3} \right)}{1 - 2 \cos x}.$$

$$674. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{x} \right)^x.$$

$$676. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{k}{x} \right)^{mx}.$$

$$678. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x-4}{3x+2} \right)^{\frac{x+1}{3}}.$$

$$680. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+1}{2x-1} \right)^x.$$

$$681. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x+1}{x-1} \right)^x.$$

$$682. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^{x^2}.$$

$$683. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 4x + 2} \right)^x.$$

$$684. \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{\sin x}}.$$

$$685. \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 + \sin x} \right)^{\frac{1}{\sin^3 x}}.$$

$$686. \lim_{x \rightarrow a} \left( \frac{\sin x}{\sin a} \right)^{\frac{1}{x-a}}.$$

$$687. \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\cos x}{\cos 2x} \right)^{\frac{1}{x^2}}.$$

$$688. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}.$$

$$689. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\operatorname{tg} x}.$$

$$690. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+kx)}{x}.$$

$$691. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(a+x) - \ln a}{x}.$$

$$692. \lim_{x \rightarrow \infty} (x(\ln(x+a)) - \ln x).$$

$$693. \lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln x - 1}{x - e}.$$

$$694. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x}.$$

$$695. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{3x}.$$

$$696. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{x - 1}.$$

$$697. \lim_{x \rightarrow 0} (x + e^x)^{\frac{1}{x}}.$$

$$698. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(2 + e^{3x})}{\ln(3 + e^{2x})}.$$

### 3.3. Неперервність функції

Досліджуючи функції на неперервність, слід пам'ятати, що елементарна функція може мати розрив тільки в окремих точках, в яких вона невизначена. Неелементарна функція може мати розриви у точках, де вона невизначена, а також у тих точках, при переході через які змінюється її аналітичний вираз.

Дослідження функції на неперервність полягає в знаходженні точок, в яких можливий розрив, з подальшою перевіркою умов неперервності функції. Перевірка умов переважно зводиться до знаходження односторонніх границь функції, коли  $x$  прямує до можливої точки розриву зліва або справа, і до подальшого порівняння значень цих границь, якщо вони існують.

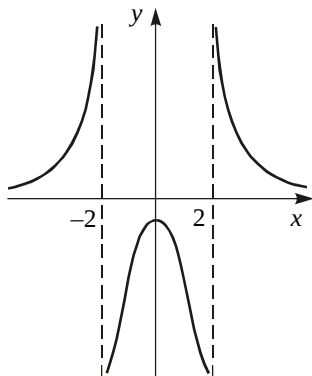
**Приклад.** Дослідити на неперервність функції:

1)  $y = \frac{1}{x^2 - 4}$ ;

2)  $y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$ ;

3)  $y = 2^{-2^{1-x}}$ ,

схематично побудувати їх графіки.

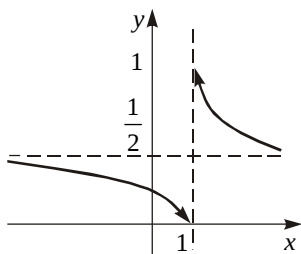
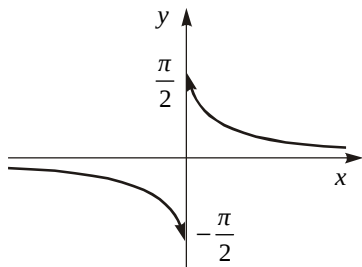


1)  $y = \frac{1}{(x-2)(x+2)}$ . Можливі точки розриву (функція невизначена в цих точках):  $x = \pm 2$ . Оскільки функція парна, то її поведінка в околі цих точок однакова. Дослідимо точку  $x = 2$ . Функція визначена в околі цієї точки, знайдемо  $\lim_{x \rightarrow 2^-0} \frac{1}{x^2 - 4} = -\infty$  і  $\lim_{x \rightarrow 2^+0} \frac{1}{x^2 - 4} = \infty$ . Отже, односторонні границі не існують, тому в точці  $x = 2$  і аналогічно в точці  $x = -2$  функція має розрив другого роду.

2)  $y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$ . Точка можливого розриву —  $x = 0$ . Знайдемо

$$\lim_{x \rightarrow 0^-0} \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+0} \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}.$$

Обидві односторонні границі функції існують, але нерівні між собою. В точці  $x = 0$  функція має розрив першого роду, стрибок.



3)  $y = 2^{-2^{1-x}}$ . Точка можливого розриву —  $x = 1$ . Знайдемо  $\lim_{x \rightarrow 1^-0} 2^{-2^{1-x}} = 0$ ,

$\lim_{x \rightarrow 1^+0} 2^{-2^{1-x}} = 1$ . Односторонні границі існують, але нерівні між собою. В точці  $x = 1$  функція має розрив першого роду.

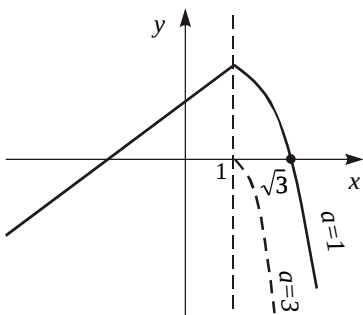
**Приклад.** Дослідження на неперервність функції:

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{якщо } x \leq 1; \\ 3-ax^2, & \text{якщо } x > 1. \end{cases}$$

При якому значенні  $a$  функція буде неперервною? Побудувати схематично графік при різних значеннях  $a$ .

Задана функція не є елементарною, хоча на кожному з проміжків вона задається елементарними функціями. Можлива точка розриву є точка переходу від одного аналітичного виразу до іншого  $x=1$ . Знайдемо односторонні границі:  $\lim_{x \rightarrow 1^-0} (x+1) = 2$ ,

$\lim_{x \rightarrow 1^+0} (3-ax^2) = 3-a$ . Згідно з означенням, якщо границі рівні між собою і рівні значенню функції в точці  $x=1$ , то функція буде неперервною. Отже, для неперервності маємо умову  $3-a=2 \Rightarrow a=1$ . При  $a=1$  функція неперервна в точці  $x=1$ , а при інших значеннях  $a$  в цій точці розрив першого роду.



**Завдання** (для підготовки до практичних занять: 699—711, 725—728; для аудиторних занять: 714, 717, 724, 729, 740, 749; домашні: 712, 713, 730, 731, 739, 741, 748; додаткові: 715, 716, 718—723, 732—738, 742—747).

*Закінchte вирази:*

**699.** Функція  $y = f(x)$  називається неперервною в точці  $x_0$ , якщо ... Для неперервної функції  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f\left(\lim_{x \rightarrow x_0} x\right)$  — (довести).

**700.** Функція  $y = f(x)$  називається неперервною на множині  $X$ , якщо ...

**701.** Точка  $x_0$  називається точкою розриву функції, якщо ...

**702.** Приростом аргументу в точці  $x_0$  називається ...

**703.** Приростом функції в точці  $x_0$  називається ...

**704.** Якщо функція неперервна в точці  $x_0$ , то  $\lim_{x \rightarrow x_0} \Delta y = \dots$

**705.** Для неперервності в точці  $x_0$  функції необхідно, щоб (вказати правильні відповіді):

а)  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ ;      б)  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x)$ ;

в)  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x)$ ;      г)  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x)$ .

**706.** Якщо функція  $y = f(x)$  неперервна в точці  $x_0$  і  $f(x_0) > 0$ , то ... (вказати правильну відповідь):

а) не існує околу точки  $x_0$ , в якому  $f(x) > 0$ ;

б) існує окіл точки  $x_0$ , в якому  $f(x) > 0$ .

**707.** Якщо функція  $y = f(x)$  неперервна на проміжку  $[a; b]$  і  $f(a) \cdot f(b) < 0$ , то ... (вибрати правильну відповідь):

а) існує така точка  $c \in (a; b)$ , що  $f(c) = 0$ ;

б) не існує такої точки  $c \in (a; b)$ , що  $f(c) \neq 0$ .

**708.** Якщо функція  $y = f(x)$  неперервна на проміжку  $[a; b]$  і  $f(a) = A$ ,  $f(b) = B$ , то ... для  $C \in (A; B)$  (вказати правильну відповідь):

а) не існує жодної такої точки  $c \in (a; b)$ , що  $f(c) = C$ ;

б) існує кілька точок  $c \in (a; b)$  таких, що  $f(c) = C$ ;

в) існує хоча б одна точка  $c \in (a; b)$ , що  $f(c) = C$ .

**709.** Якщо функція  $y = f(x)$  неперервна на проміжку  $[a; b]$ , то ... (вказати правильну відповідь):

а)  $f(x)$  обмежена на проміжку  $[a; b]$ ;

б)  $f(x)$  необмежена на проміжку  $[a; b]$ ;

в) існує таке значення  $m$ , що  $f(x) > m$ ;

г) не існує такої величини  $M$ , що  $f(x) < M$ .

**710.** Сформулювати теорему про неперервність складної функції.

**711.** Сформулювати теорему про неперервність оберненої функції.

Дослідити на неперервність функції, схематично побудувати їх графіки:

**712.**  $f(x) = \left| \frac{x-3}{x-3} \right|$ .

**713.**  $f(x) = \lg(x^2 + 3x)$ .

$$714. f(x) = \frac{x^2 - x^3}{|x - 1|}.$$

$$715. f(x) = \frac{1}{x^3 - 3x^2 - 4x}.$$

$$716. f(x) = \ln(2x + 1).$$

$$717. f(x) = \arcsin \frac{1}{x}.$$

$$718. f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

$$719. f(x) = \frac{x}{\cos x}.$$

$$720. f(x) = \frac{4}{x^2 - 2x + 1}.$$

$$721. f(x) = x + \frac{x + 2}{|x + 2|}.$$

$$722. f(x) = \frac{2|x - 1|}{x^2 - x^3}.$$

$$723. f(x) = \sqrt[3]{2} - 1.$$

724. Функція  $f(x)$  має такий вигляд:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x < 0; \\ x, & \text{якщо } 0 \leq x < 1; \\ -x^2 + 4x - 2, & \text{якщо } 1 \leq x < 3; \\ 4 - x, & \text{якщо } x \geq 3. \end{cases}$$

Чи буде вона неперервною?

725. Функція  $y = \frac{x^2 - 1}{x^3 - 1}$  невизначена в точці  $x = 1$ . Чи можна її довизначити так, щоб вона стала неперервною?

726. Скільки точок розриву і якого роду має функція  $y = \frac{1}{\ln|x|}$ ?

Побудувати її схематичний графік.

727. Чи буде неперервною функція, виражена у такий спосіб:

$$y = \sin \frac{\pi}{2x} \text{ при } x \neq 0; \quad y(0) = 1?$$

728. Побудувати графік функції  $y = x \sin \frac{\pi}{x}$ . Якого значення має набувати ця функція в точці  $x = 0$ , щоб вона була неперервною?

Розрив якого роду мають нижченаведені функції? Побудувати їх графіки.

$$729. y = \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}}.$$

$$730. y = \frac{2^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x} + 1}.$$

$$731. y = \frac{1}{1 + 2^{\lg x}}.$$

$$732. y = 1 - 2^{\frac{1}{\sin x}}.$$

$$733. y = \frac{1}{1 - 2^{\cos x}}.$$

$$734. y = e^{x + \frac{1}{x}}.$$

$$735. y = e^{\frac{-1}{x^2}}.$$

$$736. y = \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x-1}}}.$$

$$737. y = x \ln x^2.$$

$$738. y = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{x}.$$

$$739. y = \frac{1}{1 - e^{\frac{x}{1-x}}}.$$

740. При якому значенні  $a$  функція  $f(x)$  буде неперервною?

$$f(x) = \begin{cases} e^x; & x < 0; \\ a + x; & x \geq 0. \end{cases}$$

741. При яких значеннях  $a, b$  функція  $f(x)$  буде неперервною?

$$f(x) = \begin{cases} -2 \sin x; & x \leq -\frac{\pi}{2}; \\ a \sin x + b; & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}; \\ \cos x; & x \geq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Дослідити на неперервність, визначити характер точок розриву, побудувати графіки функцій:

$$742. f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^2 & \text{при } x \leq 2; \\ x & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

$$743. f(x) = \begin{cases} 2\sqrt{x} & \text{при } 0 \leq x \leq 1; \\ 4 - 2x & \text{при } 1 < x < 2,5; \\ 2x - 7 & \text{при } 2,5 \leq x < \infty. \end{cases}$$

$$744. f(x) = \begin{cases} 2x + 5 & \text{при } x \leq -1; \\ \frac{1}{x} & \text{при } x > -1. \end{cases}$$

$$745. f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{при } 0 \leq x \leq 1; \\ 2 - x & \text{при } 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

$$746. f(x) = \begin{cases} x & \text{при } |x| \leq 1; \\ 1 & \text{при } |x| > 1. \end{cases}$$

$$747. f(x) = \begin{cases} \cos \frac{\pi}{2} x & \text{при } |x| \leq 1; \\ |x - 1| & \text{при } |x| > 1. \end{cases}$$

$$748. f(x) = \begin{cases} -x & \text{при } x \leq -1; \\ \frac{2}{x-1} & \text{при } x > -1. \end{cases}$$

$$749. f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{при } x < 0; \\ (x-1)^2 & \text{при } 0 \leq x \leq 2; \\ 4 - x & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

### 3.4. Похідна і диференціал функції

**Завдання** (для підготовки до практичних занять: 750—766, 777—790, 901, 977; для аудиторних занять: 767 (1), 768, 773, 791, 884, 902, 907, 964, 986, 1000; домашні: 767 (2—5), 770, 772, 792—794, 885—887, 903—906, 978—985, 1001; додаткові: 769, 771, 774—776, 795—833, 888—900, 908—963, 965—975, 987—999, 1002—1013).

*Закінchte вирази:*

**750.** Похідною функції  $y = f(x)$  у точці  $x$  називається ...

**751.** Дотичною до графіка функції  $y = f(x)$  у точці  $M$  називається ...

**752.** Геометричний зміст похідної функції полягає в тому, що ...

**753.** Фізичний зміст похідної функції полягає в тому, що ...

**754.** Економічний зміст похідної функції полягає в тому, що ...

**755.** Функція  $y = f(x)$  називається диференційовною в точці  $x$ , якщо ...

**756.** Вказати правильне твердження:

а) якщо функція  $f(x)$  неперервна в точці  $x$ , то вона диференційовна в ній;

б) якщо функція  $f(x)$  диференційовна в точці  $x$ , то вона неперервна в цій точці.

**757.** Диференціалом функції  $f(x)$  називається ...

**758.** Геометричний зміст диференціала полягає в тому, що ...

**759.** Якщо існують похідні функцій  $u(x)$  і  $v(x)$ , то:

а)  $(u(x) \pm v(x))' = \dots$  (довести);

б)  $(u(x) \cdot v(x))' = \dots$  (довести);

в)  $\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \dots$  (довести).

**760.** Сформулювати і довести теорему про похідну складної функції.

**761.** Сформулювати і довести теорему про похідну оберненої функції.

**762.** Еластичністю функції називається ...

**763.** Якщо існують еластичності  $E_x(u)$  та  $E_x(v)$  функцій  $u(x)$  і  $v(x)$ , то:

а)  $E_x(u \cdot v) = \dots$  (довести);

б)  $E_x\left(\frac{u}{v}\right) = \dots$  (довести).

**764.** Попит називається еластичним, якщо ...

**765.** Попит називається нееластичним, якщо ...

**766.** Знайти відношення  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  для функцій:

1)  $y = 2x^3 - x^2 + 1$  при  $x = 1$ ;  $\Delta x = 0,1$ ;

2)  $y = \frac{1}{x}$  при  $x = 2$ ;  $\Delta x = 0,01$ ;

3)  $y = \sqrt{x}$  при  $x = 4$ ;  $\Delta = 0,4$ .

**767.** Використовуючи означення похідної як  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ , знайти похідні функцій:

1)  $y = 3x^2 - 4x$ ;

2)  $y = \cos 3x$ ;

3)  $y = e^{4x}$ ;

4)  $y = \ln x$ ;

5)  $y = \frac{1}{x^2}$ ;

6)  $y = \sqrt{4x+1}$ ;

7)  $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ ;

8)  $y = \operatorname{tg} 2x$ .

**768.** Нехай витрати виробництва є функцією кількості випущеної продукції:  $y = 50x - 0,05x^3$ . Знайти середні і граничні витрати виробництва за обсягу випущеної продукції, що дорівнює 10 грошовим одиницям.

**769.** Обсяг виготовленої продукції  $y$  (ум. од.) цеху протягом робочого дня виражається такою функцією  $y = -t^3 - 5t^2 + 75t + 425$ , де  $t$  — кількість годин роботи. Знайти обсяг випуску продукції через 2 години після початку робочого дня.

**770.** У якій точці дотична до параболи  $y = x^3$ : 1) паралельна осі  $OX$ ; 2) утворює кут  $45^\circ$  з віссю  $OX$ ?

**771.** У яких точках кутовий коефіцієнт дотичної до параболи  $y = x^3 - 1$  дорівнює 3?

**772.** Під якими кутами перетинаються парабола  $y = x^2$  і пряма  $3x - y - 2 = 0$ ?

**773.** Під яким кутом перетинаються гіпербола  $y = \frac{1}{x}$  і парабола  $y = \sqrt{x}$ ?

**774.** Скласти рівняння дотичних до кривої  $y = \frac{8}{4+x^2}$ :

1) в точці  $x = 2$ ;

2) в точці перетину з віссю  $OY$ .

**775.** Задано криву  $y = x^2 - 2x$ . Скласти рівняння дотичних:

1) в точках перетину її з прямою  $3x + y - 2 = 0$ ;

2) паралельної і перпендикулярної до цієї прямої;

3) що проходять через точку  $(1; -5)$ .

**776.** Скласти рівняння спільних дотичних до кривих  $y = x^2$  і  $y = -2x^2 + 4x - y$ .

Знайти похідні функцій:

**777.**  $y = (1 + \sqrt[3]{x})^3$ .

**778.**  $y = a \operatorname{tg} \left( \frac{x}{k} + b \right)$ .

**779.**  $y = \sqrt{1 + \sqrt{2px}}$ .

**780.**  $y = \operatorname{arctg}(x^2 - 3x + 2)$ .

**781.**  $y = \lg(x - \cos x)$ .

**782.**  $y = 3 \cos^2 x - \cos^3 x$ .

**783.**  $y = 5 \operatorname{tg} \frac{x}{5} + \operatorname{tg} \frac{\pi}{8}$ .

**784.**  $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x + \sqrt{x}}}$ .

**785.**  $y = \sin \frac{x}{2} \sin 2x$ .

**786.**  $y = \sin x \cdot e^{\cos x}$ .

**787.**  $y = x^5 \sqrt[3]{x^6 - 8}$ .

**788.**  $y = e^{-x^2} \ln x$ .

**789.**  $y = \left( \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^{10}$ .

**790.**  $y = \operatorname{arctg} \frac{x+1}{x-1}$ .

**791.**  $y = e^{2x+3} \left( x^2 - x + \frac{1}{2} \right)$ .

**792.**  $y = \frac{2 \sin^2 x}{\cos 2x}$ .

**793.**  $y = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{3}}{1-x^2}$ .

**794.**  $y = \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + \operatorname{ctg} \frac{x}{2}}{x}$ .

**795.**  $y = \sin^2 \frac{x}{3} \operatorname{ctg} \frac{x}{2}$ .

**796.**  $y = \frac{\sqrt[9]{4x^5 + 2}}{3x^4}$ .

**797.**  $y = \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2})$ .

**798.**  $y = x \operatorname{arctg} \sqrt{x}$ .

**799.**  $y = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^4 x}$ .

**800.**  $y = \cos 2x \ln x$ .

**801.**  $y = \frac{2}{3} \operatorname{arctg} x + \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{x}{1-x^2}$ .

**802.**  $y = \arcsin(\sin x)$ .

**803.**  $y = \arcsin \sqrt{\sin x}$ .

**804.**  $y = \frac{1}{18} \sin^6 3x - \frac{1}{24} \sin^8 3x$ .

$$805. y = x - \sqrt{1-x^2} \arcsin x.$$

$$806. y = \cos \frac{\arcsin x}{2}.$$

$$807. y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}.$$

$$808. y = \arccos \sqrt{1-3x}.$$

$$809. y = \sin^2 \left( \frac{1 - \ln x}{x} \right).$$

$$810. y = \log_3 (x^2 - \sin x).$$

$$811. y = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}.$$

$$812. y = \ln \frac{x + \sqrt{1-x^2}}{x}.$$

$$813. y = \arcsin(\ln x).$$

$$814. y = \operatorname{tg} \frac{1-e^x}{1+e^x}.$$

$$815. y = \cos x \sqrt{1 + \sin^2 x}.$$

$$816. y = 0,4 \left( \cos \frac{2x+1}{2} - \sin 0,8x \right)^2.$$

$$817. y = x \cdot 10^{\sqrt{x}}.$$

$$818. y = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 2x}.$$

$$819. y = \ln \operatorname{arctg} \frac{1}{1+x}.$$

$$820. y = \ln \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}}.$$

$$821. y = \sqrt[3]{1+x\sqrt{x+3}}.$$

$$822. y = x^2 \sqrt{1+\sqrt{x}}.$$

$$823. y = \frac{1}{\sqrt{1+\sin^2 x}}.$$

$$824. y = x^3 \operatorname{arctg} x^3.$$

$$825. y = \frac{\ln \sin x}{\ln \cos x}.$$

$$826. y = \arcsin x + \sqrt{1-x^2}.$$

$$827. y = \frac{\arcsin 4x}{1-4x}.$$

$$828. y = e^{\frac{1}{\ln x}}.$$

$$829. y = \ln \frac{1-e^x}{e^x}.$$

$$830. y = 10^{x \operatorname{tg} x}.$$

$$831. y = \sin^2 x \cdot \sin x^2.$$

$$832. y = \frac{2 \cos x}{\sqrt{\cos 2x}}.$$

$$833. y = x \sqrt{\frac{1-x}{1+x^2}}.$$

$$834. y = \frac{1}{4} \ln \frac{1+x}{1-x} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x.$$

$$835. y = 2^{\frac{x}{\ln x}}.$$

$$836. y = \sqrt{(a-x)(x-b)} - (a-b) \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{a-x}{x-b}}.$$

$$837. y = \frac{\sin 3x}{2 \sin^2 x \cos x}.$$

$$838. y = e^{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}.$$

$$839. y = \sqrt{a^2 - x^2} - a \arccos \frac{x}{a}.$$

$$840. y = \sqrt{x^2 + 1} - \ln \left( \frac{1}{x} + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \right).$$

$$841. y = \frac{\sin^2 x}{1 + \operatorname{ctg} x} + \frac{\cos^2 x}{1 + \operatorname{tg} x}.$$

$$842. y = \ln \left( x + \sqrt{x^2 - 1} - \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} \right).$$

$$843. y = e^{ax} (a \sin x - \cos x).$$

$$844. y = x e^{1 - \cos x}.$$

$$845. y = \frac{1}{\operatorname{arctg} e^{-2x}}.$$

$$846. y = e^x (\sin 3x - 3 \cos 3x).$$

$$847. y = 3x^3 \arcsin x + (x^2 + 2) \sqrt{1 - x^2}.$$

$$848. y = \frac{1}{\sqrt{1 + e^{-\sqrt{x}}}}.$$

$$849. y = 2 \arcsin \frac{x-2}{\sqrt{6}} - \sqrt{2 + 4x - x^2}.$$

$$850. y = \ln(e^x \cos x + e^{-x} \sin x).$$

$$851. y = \frac{1 + x \operatorname{arctg} x}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

$$852. y = \frac{1}{\cos(x - \cos x)}.$$

$$853. y = e^x \sin x \cos^3 x.$$

$$854. y = \sqrt[11]{9 + 6 \sqrt[5]{x^9}}.$$

$$855. y = x - \ln(2e^x + 1 + \sqrt{e^{2x} + 4e^x + 1}).$$

$$856. y = e^{\operatorname{arctg} \sqrt{1 + \ln(2x+3)}}.$$

$$857. y = \frac{e^{x^2}}{e^x + e^{-x}}.$$

$$858. y = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} - \operatorname{ctg} x \ln(1 + \sin x) - x.$$

$$859. y = 2 \ln(2x - 3\sqrt{1-4x^2}) - 6 \arcsin 2x.$$

$$860. y = \frac{3x^2 - 1}{3x^3} + \ln \sqrt{1+x^2} + \operatorname{arctg} x.$$

$$861. y = \frac{1}{2}(3-x)\sqrt{1-2x-x^2} + 2 \arcsin \frac{x+1}{\sqrt{2}}.$$

$$862. y = \ln(x \sin x \sqrt{1-x^2}).$$

$$863. y = x\sqrt{1+x^2} \sin x.$$

$$864. y = \frac{\sqrt{x+2}(3-x)^4}{(x+1)^5}.$$

$$865. y = \sqrt[5]{(1+xe^{\sqrt{x}})^3}.$$

$$866. y = \frac{1}{\sqrt{x}} e^{x^2 - \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2} \ln x + 1}.$$

$$867. y = \frac{\sin x}{4 \cos^4 x} + \frac{3 \sin x}{8 \cos^2 x} + \frac{3}{8} \ln \frac{1 + \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg} \frac{x}{2}}.$$

$$868. y = \frac{xe^x \operatorname{arctg} x}{\ln^5 x}.$$

$$869. y = \frac{(1-x^2)e^{3x-1} \cos x}{(\arccos x)^3}.$$

$$870. y = x\sqrt{(x^2 + a^2)^3} + \frac{3a^2 x}{2} \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{3a^4}{2} \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}).$$

$$871. y = x(\arcsin x)^2 - 2x + 2\sqrt{1-x^2} \arcsin x.$$

$$872. y = \ln \cos \operatorname{arctg} \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

$$873. y = \frac{1}{m\sqrt{ab}} \operatorname{arctg} \left( e^{mx} \sqrt{\frac{a}{b}} \right).$$

$$874. y = \frac{1}{3} \ln \frac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}}.$$

$$875. y = \ln \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} + 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}.$$

$$876. y = (\operatorname{tg} 2x)^{\operatorname{ctg} \frac{x}{2}}.$$

$$877. y = \sqrt{\frac{x-5}{\sqrt[5]{x^2+4}}}.$$

$$878. y = \ln \sqrt[4]{\frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1}} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \left( \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} \right).$$

$$879. y = \arccos \frac{x^{2n} - 1}{x^{2n} + 1}.$$

$$880. y = -\frac{x}{1+8x^3} + \frac{1}{12} \ln \frac{(1+2x)^2}{1-2x+4x^2} + \frac{\sqrt{3}}{6} \operatorname{arctg} \frac{4x-1}{\sqrt{3}}.$$

881. Перевірити, чи функція  $y = \ln \frac{1}{1+x}$  задовольняє рівняння:  
 $x \frac{dy}{dx} + 1 = e^y.$

882. Переконайтесь, що функція  $y = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} x \sqrt{x^2 + 1} + \ln \sqrt{x + \sqrt{x^2 + 1}}$  задовольняє рівняння:  $2y = xy' + \ln y'.$

883. Переконайтесь, що функція  $y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$  задовольняє рівняння:  $(1-x^2)y' + xy = 1.$

Знайти похідні функцій, використовуючи логарифмічне диференціювання:

$$884. y = x^{x^2}.$$

$$885. y = x^{x^x}.$$

$$886. y = (\sin x)^{\cos x}.$$

$$887. y = (\ln x)^x.$$

$$888. y = \sqrt[3]{(x+1)^2}.$$

$$889. y = x^3 e^{x^2} \sin 2x.$$

$$890. y = \frac{(x-2)^2 \sqrt[3]{x+1}}{(x-5)^3}.$$

$$891. y = x^{\ln x}.$$

$$892. y = \frac{(x+1)^3 \sqrt[4]{x-2}}{\sqrt[5]{(x-3)^2}}.$$

$$893. y = \sqrt{x \sin x \sqrt{1-e^x}}.$$

$$894. y = \sqrt{\frac{1 - \arcsin x}{1 + \arcsin x}}.$$

$$895. y = x^{\frac{1}{x}}.$$

$$896. y = x^{\sin x}.$$

$$897. y = \left( \frac{x}{1+x} \right)^x.$$

$$898. y = 2x^{\sqrt{x}}.$$

$$899. y = (x^2 + 1)^{\sin x}.$$

$$900. y = \sqrt[3]{\frac{x(x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^2}}.$$

Знайти похідні функцій, заданих неявно:

$$901. \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

$$902. x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}.$$

$$903. x^3 + y^3 - 3axy = 0.$$

$$904. y^2 \cos x = a^2 \sin 3x.$$

$$905. y^3 - 3y + 2ax = 0.$$

$$906. y^2 - 2xy + b^2 = 0.$$

$$907. x^4 + y^4 = x^2 y^2.$$

$$908. x^3 + ax^2 y + bxy^2 + y^3 = 0.$$

$$909. \sin(xy) + \cos(xy) = \operatorname{tg}(x + y). \quad 910. 2^x + 2^y = 2^{x+y}.$$

$$911. 2y \ln y = x.$$

$$912. x - y = \arcsin x - \arcsin y.$$

$$913. x^y = y^x.$$

$$914. y = \cos(x + y).$$

$$915. \cos(xy) = x.$$

$$916. x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$$

$$917. y = 1 + xe^y.$$

$$918. x \sin y - \cos y + \cos 2y = 0.$$

$$919. \operatorname{tg} \frac{y}{2} = \sqrt{\frac{1-k}{1+k}} \operatorname{tg} \frac{x}{2}.$$

$$920. y \sin x - \cos(x - y) = 0.$$

$$921. y = x + \operatorname{arctg} y.$$

Знайти похідні функцій, заданих параметрично:

$$922. x = a \cos \varphi;$$

$$y = b \sin \varphi.$$

$$923. x = a \cos^3 \varphi;$$

$$y = b \sin^3 \varphi.$$

$$924. x = a(\varphi - \sin \varphi);$$

$$y = a(1 - \cos \varphi).$$

$$925. x = 1 - t^2;$$

$$y = t - t^3.$$

$$926. x = \frac{t+1}{t};$$

$$y = \frac{t-1}{t}.$$

$$927. x = \ln(1+t^2);$$

$$y = t - \arctg t.$$

$$928. x = \varphi(1 - \sin \varphi);$$

$$y = \varphi \cos \varphi.$$

$$929. x = \frac{1+t^2}{t^2-1};$$

$$y = \frac{t}{t^2-1}.$$

$$930. x = e^t \sin t;$$

$$y = e^t \cos t.$$

$$931. x = \frac{3at}{1+t^3};$$

$$y = \frac{3at^2}{1+t^3}.$$

932. Переконатись, що функція, яка задана параметрично:  
 $x = \frac{1+t}{t^2}; y = \frac{3}{2t^2} + \frac{2}{t}$ , задовольняє рівняння  $x(y')^3 = 1 + y'$ , де  $y' = \frac{dy}{dx}$ .

933. Переконатись, що функція, задана параметрично рівняннями:  
 $x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} - \ln \frac{1+\sqrt{1+t^2}}{t}; y = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$ , задовольняє співвідношення  $y\sqrt{1+y^2} = y'$ .

Знайти еластичності функцій:

$$934. y = \frac{x^3}{3} - 2x^2.$$

$$935. y = x + 2\sqrt{x}.$$

$$936. y = x - \sin x.$$

$$937. y = \frac{\cos x}{x^2}.$$

$$938. y = \frac{\operatorname{tg} x}{x}.$$

$$939. y = x^2 \sqrt{1-x^2}.$$

$$940. y = x^2 \operatorname{tg} x.$$

$$941. y = x^2 + 3^x.$$

$$942. y = x^2 e^x.$$

$$943. y = \frac{1+e^x}{1-e^x}.$$

$$944. y = x \ln x.$$

$$945. y = \ln(x^2 + 2x).$$

$$946. y = e^{\sin x}.$$

$$947. y = \ln \frac{e^x}{x^2 + 1}.$$

$$948. y = \ln(x + \sqrt{4 + x^2}).$$

$$949. y = \arcsin \sqrt{x}.$$

$$950. y = \arccos(1 - x^2).$$

$$951. y = \operatorname{arctg} x - \frac{1}{x}.$$

Знайти диференціали функцій:

$$952. y = (x^2 + 4x + 1)(x^2 - \sqrt{x}).$$

$$953. y = \frac{x^3 + 1}{x^3 - 1}.$$

$$954. x = \frac{1}{1 - t^2}.$$

$$955. y = (1 + x - x^2)^3.$$

$$956. y = \operatorname{tg}^2 x.$$

$$957. y = 5^{\ln \operatorname{tg} x}.$$

$$958. y = 2^{\frac{1}{\cos x}}.$$

$$959. y = \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{4}\right).$$

$$960. y = \frac{\cos x}{1 - x^2}.$$

$$961. y = \sqrt{\arcsin x} + (\operatorname{arctg} x)^2.$$

$$962. y = 3\arcsin x - 4\operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}\arccos x - 3\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x.$$

$$963. y = 3^{\frac{1}{x^2}} + 3x^3 - 4\sqrt{x}.$$

964. Обчислити значення диференціалів функцій:

$$1) y = \frac{1}{(\operatorname{tg} x + 1)^2}, \text{ якщо величина аргументу змінюється від } x = \frac{\pi}{6} \text{ до } x = \frac{61\pi}{360};$$

$$2) y = \cos^2 \varphi, \text{ якщо } \varphi \text{ змінюється від } 60^\circ \text{ до } 60^\circ 30';$$

$$3) y = \sin 2\varphi, \text{ якщо } \varphi \text{ змінюється від } \frac{\pi}{6} \text{ до } \frac{61\pi}{360}.$$

965. Знайти наближено значення приросту функції  $y = \sin x$  при зміні  $x$  від  $30^\circ$  до  $30^\circ 1'$ . Чому дорівнює  $\sin 30^\circ 1'$ ?

Знайти наближено, використовуючи рівність  $\Delta y \approx dy$ :

$$966. \operatorname{arctg} 1,02.$$

$$967. \operatorname{arctg} 0,97.$$

$$968. \sin 48^\circ.$$

$$969. \cos 63^\circ.$$

970.  $\operatorname{tg} 48^\circ$ .

971.  $\operatorname{ctg} 27^\circ$ .

972.  $\sqrt[3]{68}$ .

973.  $\sqrt[5]{240}$ .

974.  $\lg 12$ .

975.  $\arcsin 0,4836$ .

976.  $e^{0,041}$ .

Знайти похідні вищих порядків:

977.  $y = x^2 - 3x + 2$ ;

$y'' = ?$

978.  $y = 1 - x^2 - x^4$ ;

$y''' = ?$

979.  $f(x) = (x + 10)^6$ ;

$f'''(2) = ?$

980.  $f(x) = x^6 - 4x^3 + 4$ ;

$f^{IV}(1) = ?$

981.  $y = (x^2 + 1)^3$ ;

$y'' = ?$

982.  $y = \cos^2 x$ ;

$y''' = ?$

983.  $f(x) = e^{2x-1}$ ;

$f''(0) = ?$

984.  $f(x) = \operatorname{arctg} x$ ;

$f''(1) = ?$

985.  $f(x) = \frac{1}{1-x}$ ;

$f^V(x) = ?$

986.  $y = x^3 \ln x$ ;

$y^{IV} = ?$

987.  $f(x) = \frac{a}{x^n}$ ;

$y''(x) = ?$

988.  $\rho = a \sin 2\varphi$ ;

$\frac{d^4 \rho}{d\varphi^4} = ?$

989.  $y = \frac{1-x}{1+x}$ ;

$y^{(n)} = ?$

Знайти похідні другого порядку:

990.  $y = xe^{x^2}$ .

991.  $y = \frac{1}{1+x^3}$ .

992.  $y = (1+x^2)\operatorname{arctg} x$ .

993.  $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ .

994.  $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ .

995.  $y = \frac{1}{a + \sqrt{x}}$ .

$$996. y = e^{\sqrt{x}}.$$

$$997. y = \sqrt{1-x^2} \arcsin x.$$

$$998. y = \arcsin(a \sin x).$$

$$999. y = x^x.$$

Знайти загальний вираз похідних  $n$ -го порядку для функцій:

$$1000. y = e^{ax}.$$

$$1001. y = \sin x.$$

$$1002. y = \cos x.$$

$$1003. y = \sin^2 x.$$

$$1004. y = xe^x.$$

$$1005. y = \ln x.$$

$$1006. y = x \ln x.$$

$$1007. y = \sin ax + \cos bx.$$

$$1008. y = \frac{1}{ax+b}.$$

$$1009. y = \frac{x}{x^2-1}.$$

Використовуючи формулу Лейбніца, знайти похідні функцій:

$$1010. y = (x^2 + 1) \sin x; \quad y^{(20)} = ?$$

$$1011. y = (x^3 + 3x^2) e^x; \quad y^{(10)} = ?$$

$$1012. y = e^x \sin x; \quad y^{(30)} = ?$$

### 3.5. Застосування похідної

**Завдання** (для підготовки до практичних занять: 1014—1044, 1124; для аудиторних занять: 1045, 1061, 1081, 1094, 1106, 1135, 1140, 1211—1214, 1242, 1244, 1252; домашні: 1046, 1062, 1082, 1095, 1107, 1136, 1141, 1215—1218, 1243, 1245, 1253; додаткові: 1047—1060, 1063—1080, 1083—1093, 1096—1105, 1108—1123, 1125—1134, 1137—1139, 1142—1210, 1219—1241, 1246—1251, 1254—1263).

*Закінchte вирази:*

**1014.** Точка  $x_0$  називається точкою локального мінімуму функції  $y = f(x)$ , якщо ...

**1015.** Точка  $x_0$  називається точкою локального максимуму функції  $y = f(x)$ , якщо ...

**1016.** Точка  $x_0$  називається критичною точкою функції  $f(x)$ , якщо ...

**1017.** Сформулювати і довести теорему Ферма.

**1018.** Сформулювати обернену теорему до теореми Ферма. Чи правильна вона? Навести приклади.

**1019.** Вкажіть правильне твердження:

а) якщо похідна функції в точці  $x_0$  дорівнює нулю або не існує, то в цій точці функція  $f(x)$  має екстремум;

б) якщо в точці екстремуму існує похідна функції  $f(x)$ , то вона дорівнює нулю.

**1020.** Функція  $y = f(x)$ :

1) визначена і неперервна на проміжку  $[a, b]$ ;

2) на проміжку  $[a, b]$  набуває мінімального і максимального значень;

3) набуває на кінцях відрізка  $[a, b]$  значень з різними знаками;

4) диференційовна на інтервалі  $(a, b)$ ;

5) на кінцях інтервалу набуває однакових значень.

Які твердження з щойно перелічених використовуються для доведення теореми Ролля?

**1021.** Які з перелічених вище тверджень використовуються для доведення теореми Лагранжа?

**1022.** Яка з вимог теореми Ролля не виконується для функції  $y = |x|$  при  $x \in [-1; 1]$ ?

**1023.** Геометричний зміст теореми Ролля полягає в тому, що ...

**1024.** Геометричний зміст теореми Лагранжа полягає в тому, що ...

**1025.** Сформулювати і довести теорему Ролля.

**1026.** Сформулювати і довести теорему Лагранжа.

**1027.** Сформулювати правило Лопітала.

**1028.** Умова зростання функції  $f(x)$  на проміжку  $[a, b]$  полягає в тому, що ...

**1029.** Умова спадання функції  $f(x)$  на проміжку  $[a, b]$  полягає в тому, що ...

**1030.** Умова існування екстремуму функції  $f(x)$  у точці  $x_0$  полягає в тому, що ...

**1031.** Умова опуклості графіка функції  $f(x)$  на проміжку  $[a, b]$  полягає в тому, що ...

**1032.** Умова ввігнутості графіка функції  $f(x)$  на проміжку  $[a, b]$  полягає в тому, що ...

**1033.** Точка  $x_0$  називається точкою перегину графіка функції  $f(x)$ , якщо ...

**1034.** Пряма  $y = kx + b$  буде нахиленою асимптотою графіка функції  $y = f(x)$ , якщо  $k = \dots$ ,  $b = \dots$

**1035.** Пряма  $x = x_0$  буде вертикальною асимптотою графіка функції  $y = f(x)$ , якщо  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \dots$

**1036.** Перевірити виконання теореми Ролля для функції  $y = x^3 + 4x^2 - 7x - 10$  на проміжку  $x \in [-1; 2]$ .

**1037.** Перевірити виконання теореми Ролля для функції  $y = \ln \sin x$  на проміжку  $x \in \left[ -\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6} \right]$ .

**1038.** Перевірити виконання теореми Ролля для функції  $y = \sqrt[3]{x^2 - 3x + 2}$  на проміжку  $x \in [1; 2]$ .

**1039.** Чи виконуються умови теореми Ролля для функції  $y = \frac{2 - x^2}{x^4}$  на проміжку  $x \in [-1; 1]$ ?

**1040.** Написати формулу Лагранжа для функції  $y = \sin 3x$ , якщо  $x \in [x_1; x_2]$ .

**1041.** Написати формулу Лагранжа для функції  $y = x(1 - \ln x)$ , коли  $x \in [a; b]$ .

**1042.** Написати формулу Лагранжа для функції  $y = \arcsin 2x$ , якщо  $x \in [x_0; x_0 + \Delta x]$ .

**1043.** Перевірити виконання умов теореми Лагранжа для функції  $y = \ln x$ , якщо  $x \in [1; e]$ .

**1044.** Використовуючи формулу Лагранжа, довести нерівності:

$$1) \frac{a-b}{a} \leq \ln \frac{a}{b} \leq \frac{a-b}{b} \text{ при } 0 < b \leq a;$$

$$2) \frac{\alpha - \beta}{\cos^2 \beta} \leq \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta \leq \frac{\alpha - \beta}{\cos \alpha} \text{ при } 0 < \beta \leq \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

Знайти інтервали монотонності таких функцій:

$$1045. y = x^2(a - x)^2. \quad 1046. y = x + \frac{a^2}{x}; (a > 0).$$

$$1047. y = x\sqrt{2 - x^2}. \quad 1048. y = (x - 2)^5(2x + 1)^4.$$

$$1049. y = \sqrt[3]{(2x - a)(a - x)^2}; (a > 0). \quad 1050. y = \frac{1 - x + x^2}{1 + x + x^2}.$$

$$1051. y = \frac{10}{4x^3 - 9x^2 + 6x}. \quad 1052. y = x - e^x.$$

$$1053. y = x^2 e^{-x}. \quad 1054. y = \frac{x}{\ln x}.$$

$$1055. y = 2x^2 - \ln x. \quad 1056. y = x - 2 \sin x; (0 \leq x \leq 2\pi).$$

$$1057. y = 2 \sin x + \cos 2x; (0 \leq x \leq 2\pi).$$

$$1058. y = x + \cos x. \quad 1059. y = \ln(x + \sqrt{1 + x^2}).$$

$$1060. y = x\sqrt{ax - x^2}; (a > 0).$$

У завданнях 1061—1080 визначити екстремуми функцій:

$$1061. y = 2x^3 - 3x^2. \quad 1062. y = 2x^3 - 6x^2 - 18x + 7.$$

$$1063. y = \frac{3x^2 + 4x + 4}{x^2 + x + 1}. \quad 1064. y = \sqrt[3]{x^3 - 3x^2 + 8}.$$

$$1065. y = \frac{1}{\ln(x^4 + 4x^3 + 30)}. \quad 1066. y = -x^2\sqrt{x^2 + 2}.$$

$$1067. y = \frac{2}{3}x^2\sqrt[3]{6x - 7}. \quad 1068. y = \frac{4\sqrt{3}}{9x\sqrt{1 - x}}.$$

$$1069. y = \frac{1 + 3x}{\sqrt{4 + 5x^2}}. \quad 1070. y = \sqrt[3]{(x^2 - a^2)^2}.$$

$$1071. y = x - \ln(1 + x). \quad 1072. y = x - \ln(1 + x^2).$$

$$1073. y = (x - 5)^2 \sqrt[3]{(x + 1)^2}. \quad 1074. y = (x^2 - 2x) \ln x - \frac{3}{2}x^2 + 4x.$$

$$1075. y = \frac{1}{2}(x^2 + 1) \arctg x - \frac{\pi}{8}x^2 - \frac{x - 1}{2}.$$

$$1076. y = \frac{1}{2} \left( x^2 - \frac{1}{2} \right) \arcsin x + \frac{1}{4} x \sqrt{1-x^2} - \frac{\pi}{12} x^2.$$

$$1077. y = x \sin x + \cos x - \frac{1}{4} x^2; \left( -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \right).$$

$$1078. y = \left( \frac{1}{2} - x \right) \cos x + \sin x - \frac{x^2 - x}{4}; \left( 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \right).$$

$$1079. y = \frac{2-x}{\pi} \cos \pi(x+3) + \frac{1}{\pi^2} \sin \pi(x+3); (0 < x < 4).$$

$$1080. y = ae^{px} + be^{-px}.$$

Знайти найбільше і найменше значення функцій у заданих проміжках:

$$1081. y = x^4 - 2x^2 + 5; [-2; 2]. \quad 1082. y = x + 2\sqrt{x}; [0; 4].$$

$$1083. y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1; [-1; 2]. \quad 1084. y = x^3 - 3x^2 + 6x - 2; [-1; 1].$$

$$1085. y = \sqrt{100 - x^2}; [-6; 8]. \quad 1086. y = \frac{1-x+x^2}{1+x-x^2}; [0; 1].$$

$$1087. y = \frac{x-1}{x+1}; [0; 4].$$

$$1088. y = \frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{1-x}; (0 < x < 1); (a > 0; b > 0).$$

$$1089. y = \sin 2x - x; \left[ -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]. \quad 1090. y = 2\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^2 x; \left[ 0; \frac{\pi}{2} \right).$$

$$1091. y = x^x; (0,1 \leq x < \infty). \quad 1092. y = \sqrt[3]{(x^2 - 2x)^2}; [0; 3].$$

$$1093. y = \operatorname{arctg} \frac{1-x}{1+x}; [0; 1].$$

1094. На колі дано точку  $A$ . Провести хорду  $BC$  паралельно дотичній до кола в т.  $A$  так, щоб площа трикутника  $ABC$  була найбільшою.

1095. Знайти сторони прямокутника найбільшого периметра, вписаного в півколо радіусом  $R$ .

1096. У заданий сегмент кола вписати прямокутник найбільшої площі.

**1097.** Навколо заданого циліндра описати конус найменшого об'єму так, щоб основи циліндра і конуса лежали в одній площині.

**1098.** Знайти кут при вершині осьового перерізу конуса найменшої бічної поверхні, який описаний навколо заданої кулі.

**1099.** Знайти кут при вершині рівнобедреного трикутника заданої площі, щоб радіус вписаного в цей трикутник кола був найбільшим.

**1100.** Знайти висоту прямого кругового конуса найменшого об'єму, описаного навколо кулі радіусом  $R$ .

**1101.** Якою має бути висота конуса, вписаного в кулю радіусом  $R$ , щоб його бічна поверхня була найбільшою?

**1102.** Через дану точку  $A(1; 4)$  проведіть пряму так, щоб сума довжин відрізків, які вона відтинає на осях системи координат, була найменшою.

**1103.** Знайти сторону прямокутника найбільшої площі, вписаного в еліпс  $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 1$ .

**1104.** Через яку точку еліпса  $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{18} = 1$  слід провести дотичну, щоб площа трикутника, утвореного цією дотичною і осями координат, була найменшою?

**1105.** На еліпсі  $2x^2 + y^2 = 18$  дано дві точки:  $A(1; 4)$ ,  $B(3; 0)$ . Знайти на ньому третю точку  $C$ , щоб площа трикутника  $ABC$  була найбільшою.

Знайти точки перегину та інтервали опуклості і вгнутості графіків функцій:

**1106.**  $y = x^3 - 5x^2 + 3x - 5$ .

**1107.**  $y = (x+1)^4 + e^x$ .

**1108.**  $y = x^4 - 12x^3 + 48x^2 - 50$ .

**1109.**  $y = x + 36x^2 - 2x^3 - x^4$ .

**1110.**  $y = 3x^5 - 5x^4 + 3x - 2$ .

**1111.**  $y = (x+2)^6 + 2x + 2$ .

**1112.**  $y = \frac{x^3}{x^2 + 3a^2}$ ;  $(a > 0)$ .

**1113.**  $y = a\sqrt[3]{x-b}$ .

**1114.**  $y = e^{\sin x}$ ;  $\left(-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$ .

**1115.**  $y = \ln(1+x^2)$ .

$$1116. y = \frac{a}{x} \ln \frac{x}{a}; \quad (a > 0).$$

$$1117. y = a - \sqrt[5]{(x-b)^2}.$$

$$1118. y = e^{\operatorname{arctg} x}.$$

$$1119. y = x^4(12 \ln x - 7).$$

1120. Довести, що лінія  $y = \frac{x+1}{x^2+1}$  має три точки перегину, які лежать на одній прямій.

1121. При яких значеннях  $a, b$  точка  $A(1; 3)$  буде точкою перегину графіка функції  $y = ax^3 + bx^2$ ?

1122. Підібрати  $\alpha$  і  $\beta$  так, щоб лінія  $x^2y + \alpha x + \beta y = 0$  мала точку  $A(2; 2,5)$  точкою перегину. Які точки перегину вона ще буде мати?

1123. При якому значенні  $a$  графік функції  $y = e^x + ax^3$  має точку перегину?

Знайти асимптоти таких ліній:

$$1124. \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

$$1125. xy = a.$$

$$1126. y = \frac{1}{x^2 - 4x + 5}.$$

$$1127. y = c + \frac{a^3}{(x-b)^2}.$$

$$1128. 2y(x+1)^2 = x^3.$$

$$1129. y^3 = a^3 - x^3.$$

$$1130. y^3 = 6x^2 + x^3.$$

$$1131. y^2(x^2+1) = x^2(x^2-1).$$

$$1132. xy^2 + x^2y = a^3.$$

$$1133. y(x^2 - 3bx + 2b^2) = x^3 - 3ax^2 + a^3.$$

$$1134. (y + x + 1)^2 = x^2 + 1.$$

$$1135. y = x \ln \left( e + \frac{1}{x} \right).$$

$$1136. y = xe^{\frac{1}{x^2}}.$$

$$1137. y = xe^{\frac{2}{x}} + 1.$$

$$1138. y = x \operatorname{arcsec} x.$$

$$1139. y = 2x + \operatorname{arctg} \frac{x}{2}.$$

Провести повне дослідження функцій і накреслити їх графіки:

$$1140. y = \frac{x}{1+x^2}.$$

$$1141. y = \frac{1}{1+x^2}.$$

$$1142. y = \frac{x}{x^2 - 1}.$$

$$1144. y = \frac{x^2}{x^2 - 1}.$$

$$1146. y = 32x^2(x^2 - 1)^3.$$

$$1148. y = x^2 + \frac{1}{x^2}.$$

$$1150. y = \frac{x^3}{3 - x^2}.$$

$$1152. y(x - 1) = x^3.$$

$$1154. y = \frac{(x - 1)^2}{(x + 1)^3}.$$

$$1156. xy = (x^2 - 1)(x - 2).$$

$$1158. y = \frac{x}{e^x}.$$

$$1160. y = \frac{e^x}{x}.$$

$$1162. y = \ln(x^2 + 1).$$

$$1164. y = x^3 e^{-x}.$$

$$1166. y = \frac{1}{e^x - 1}.$$

$$1168. y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x.$$

$$1170. y = x \sin x.$$

$$1172. y = \cos x - \ln \cos x.$$

$$1174. y = e^{\frac{1}{x^2 - 4x + 3}}.$$

$$1175. y = e^{\sin x} - \sin x \text{ (без точек перегиба).}$$

$$1143. y(x - 1)(x - 2)(x - 3) = 1.$$

$$1145. y = (x^2 - 1)^3.$$

$$1147. y = \frac{1}{x} + 4x^2.$$

$$1149. y = \frac{2x - 1}{(x - 1)^2}.$$

$$1151. y = \frac{x^3}{2(x + 1)^2}.$$

$$1153. y(x^3 - 1) = x^4.$$

$$1155. y = \frac{x^3 + 2x^2 + 7x - 3}{2x^2}.$$

$$1157. (y - x)x^4 + 8 = 0.$$

$$1159. y = x^2 e^{-x}.$$

$$1161. y = x - \ln(x + 1).$$

$$1163. y = x^2 e^{-x^2}.$$

$$1165. y = x e^{\frac{-x^2}{2}}.$$

$$1167. y = x + \frac{\ln x}{x}.$$

$$1169. y = x + \sin x.$$

$$1171. y = \ln \cos x.$$

$$1173. y = x - 2 \arctg x.$$

$$1176. y = \sqrt[3]{x^2 - x}.$$

$$1177. y^3 = x^2(x^2 - 4)^3.$$

$$1178. (3x + x)^3 = 27x.$$

$$1179. y = \sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{x^2 + 1}.$$

$$1180. y = (x-1)^{\frac{2}{3}}(x+1)^3.$$

$$1181. y^3 = 6x^2 - x^3.$$

$$1182. (y-x)^2 = x^5.$$

$$1183. (y-x^2)^2 = x^5.$$

$$1184. y^2 = x^3 + 1.$$

$$1185. y^2 = x^3 - x.$$

$$1186. y^2 = x(x-1)^2.$$

$$1187. y^2 = x^2(x-1).$$

$$1188. y^2 = \frac{x^3 - 2}{3x}.$$

$$1189. x^2y + xy^2 = 2.$$

$$1190. y^2 = x^2 \frac{a+x}{a-x}; (a > 0) \text{ (строфоїда)}.$$

$$1191. 9y^2 = 4x^3 - x^4.$$

$$1192. 25y^2 = x^2(4 - x^2)^3.$$

$$1193. y^2 = x^2 - x^4.$$

$$1194. x^2y^2 = 4(x-1).$$

$$1195. y^2(2a-x) = x^3; (a > 0) \text{ (цисоїда)}.$$

$$1196. x^2y^2 = (x-1)(x-2).$$

$$1197. x^2y^2 = (a+x)^3(a-x); (a > 0) \text{ (кохноїда)}.$$

$$1198. 16y^2 = (x^2 - 4)^2(1 - x^2). \quad 1199. y^2 = (1 - x^2)^3.$$

$$1200. y^2x^4 = (x^2 - 1)^3. \quad 1201. y^2 = 2ex e^{-2x}.$$

$$1202. y = e^{\frac{1}{x}} - x.$$

$$1203. y = e^{\operatorname{tg} x}.$$

$$1204. f(x) = \frac{\sin x}{x}, \quad f(0) = 1.$$

$$1205. y = 1 - xe^{-\frac{1}{|x|} - \frac{1}{x}} \text{ при } x \neq 0; y = 1 \text{ при } x = 0.$$

$$1206. y = x^2 - 4|x| + 3.$$

1207. Написати формулу Коші для функцій  $f(x) = \sin x$  і  $\varphi(x) = \ln x$  на інтервалі  $[a, b]$ ,  $0 < a < b$ .

1208. Написати формулу Коші для функцій  $f(x) = e^{2x}$  і  $\varphi(x) = 1 + e^x$  на інтервалі  $[a, b]$ .

**1209.** Перевірити виконання умов теореми Коші для функцій  $f(x) = x^3$  і  $\varphi(x) = x^2 + 1$  на інтервалі  $[1; 2]$ .

**1210.** Перевірити виконання умов теореми Коші для функцій  $f(x) = \sin x$  та  $\varphi(x) = x + \cos x$  на інтервалі  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ .

Використовуючи правило Лопіталя, знайти границі функцій:

$$1211. \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{a}}{\sqrt{x} - \sqrt{a}}.$$

$$1212. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{x}.$$

$$1213. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin x}.$$

$$1214. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha x} - \cos \alpha x}{e^{\beta x} - \cos \beta x}.$$

$$1215. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3}.$$

$$1216. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{e\sqrt{x}} - 1}{\sqrt{\sin bx}}.$$

$$1217. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x - \operatorname{tg} x}.$$

$$1218. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi - 2\operatorname{arctg} x}{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}.$$

$$1219. \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^m - a^m}{x^n - a^n}.$$

$$1220. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{c^x - d^x}.$$

$$1221. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{\cos x - 1}.$$

$$1222. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x \cos x}.$$

$$1223. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x\sqrt{1-x^2}}.$$

$$1224. \lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos x \ln(x-a)}{\ln(e^x - e^a)}.$$

$$1225. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}.$$

$$1226. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\operatorname{tg} x} - e^x}{\operatorname{tg} x - x}.$$

$$1227. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} - x - 1}{\cos x + \frac{x^2}{2} - 1}.$$

$$1228. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^3} - 1 - x^3}{\sin^6 2x}.$$

$$1229. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)^4 - 4x + 2x^2 - \frac{4}{3}x^3 + x^4}{6\sin x - 6x + x^3}.$$

$$1230. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \sin 2x}{\ln \sin x}.$$

$$1231. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\ln \sin x}.$$

$$1232. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(1-x) + \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}}{\operatorname{ctg} \pi x}.$$

$$1233. \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^n e^{-x}).$$

$$1234. \lim_{x \rightarrow \infty} [(\pi - 2 \operatorname{arctg} x) \ln x].$$

$$1235. \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ x \sin \frac{a}{x} \right].$$

$$1236. \lim_{x \rightarrow 1} \left[ \frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right].$$

$$1237. \lim_{\varphi \rightarrow a} \left[ (a^2 - \varphi^2) \operatorname{tg} \frac{\pi \varphi}{2a} \right].$$

$$1238. \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{\ln x} - \frac{x}{\ln x} \right).$$

$$1239. \lim_{x \rightarrow 0} \left( \operatorname{ctg} x - \frac{1}{x} \right).$$

$$1240. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\cos \frac{\pi x}{2} \ln(1-x)}.$$

$$1241. \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \sqrt[3]{(a+x)(b+x)(c+x)} - x \right].$$

$$1242. \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ x \left( e^{\frac{1}{x}} - 1 \right) \right].$$

$$1243. \lim_{x \rightarrow 0} \left[ x^2 e^{\frac{1}{x^2}} \right].$$

$$1244. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg} x)^{2x-\pi}.$$

$$1245. \lim_{x \rightarrow 0} x^{\sin x}.$$

$$1246. \lim_{x \rightarrow 0} x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}}.$$

$$1247. \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} \right)^{\operatorname{tg} x}.$$

$$1248. \lim_{x \rightarrow 0} (e^x + x)^{\frac{1}{x}}.$$

$$1249. \lim_{x \rightarrow a} \left( 2 - \frac{x}{a} \right)^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2a}}.$$

$$1250. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{x^2} \right)^x.$$

$$1251. \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{\ln(1+x)^{+x}}{x^2} - \frac{1}{x} \right].$$

1252. Розкласти многочлен  $x^4 - 5x^3 + x^2 - 3x + 4$  за степенями двочлена  $x - 4$ .

1253. Розкласти многочлен  $x^3 + 3x^2 - 2x + 4$  за степенями двочлена  $x + 1$ .

1254. Розкласти многочлен  $x^{10} - 3x^3 + 1$  за степенями двочлена  $x - 1$ .

**1255.** Функцію  $y = (x^2 - 3x + 1)^3$  розкласти за степенями  $x$ , використовуючи формулу Тейлора.

**1256.** Записати формулу Тейлора  $n$ -го порядку для функції  $y = \frac{1}{x}$  при  $x_0 = 1$ .

**1257.** Записати формулу Маклорена  $n$ -го порядку для функції  $y = xe^x$ .

**1258.** Записати формулу Тейлора  $n$ -го порядку для функції  $y = \sqrt{x}$  при  $x_0 = 4$ .

**1259.** Записати формулу Маклорена  $2n$ -го порядку для функції  $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ .

**1260.** Записати формулу Тейлора  $n$ -го порядку для функції  $y = x^3 \ln x$  при  $x_0 = 0$ .

**1261.** Записати формулу Маклорена  $2n$ -го порядку для функції  $y = \sin^2 x$ .

**1262.** Записати формулу Тейлора 3-го порядку для функції  $y = \frac{x}{x-1}$  при  $x_0 = 2$ . Побудувати графіки цієї функції і її многочлена 3-го порядку.

**1263.** Записати формулу Тейлора 2-го порядку для функції  $y = \operatorname{tg} x$  при  $x_0 = 0$  і побудувати графіки цієї функції і її многочлена 2-го порядку.

---



## ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

### 4.1. Функція багатьох змінних, її границя та неперервність

**Завдання** (для підготовки до практичних занять: 1264—1274, 1277, 1278, 1283, 1284, 1317 а), 1320, 1337, 1338; для аудиторних занять: 1281 г), 1282 а), 1294, 1303, 1306, 1309, 1311, 1317 д), 1318 г), 1322, 1326, 1329, 1339 д), 1340 б); домашні: 1275, 1279, 1281 б), в); 1282 б), в); 1285; 1288; 1302; 1304; 1312; 1317 б), в); 1318 а), д), е); 1319 а), г), е); 1321; 1323; 1324; 1325; 1331; 1339 г), е); 1341; додаткові: 1276, 1280, 1282, 1308, 1310, 1316 в), 1319 д), 1327, 1332, 1340).

*Закінчте вирази:*

- 1264.** Відкритою областю називається ...
- 1265.** Межею області називається ...
- 1266.** Замкненою областю називається ...
- 1267.** Функцією  $n$  незалежних змінних називається ...
- 1268.** Областю визначення функції  $z = f(M)$ ,  $M \in R^n$  називається ...
- 1269.** Методика геометричної побудови області визначення функції  $z = f(x; y)$  така: ...
- 1270.** Лінією рівня функції  $z = f(x; y)$  називається ...
- 1271.** Границею функції  $z = f(M)$ ,  $M \in R^n$  при  $M \rightarrow M_0$  називається ...
- 1272.** Функція  $z = f(x; y)$  називається неперервною в точці  $(x_0; y_0)$ , якщо ...
- 1273.** Властивості неперервних функцій багатьох змінних такі:...
- 1274.** Функція  $z = f(x; y)$  називається однорідною функцією  $k$ -го порядку, якщо ...

**1275.** Периметр трикутника дорівнює  $2p$ . Визначити площу трикутника як функцію двох його сторін  $x$  та  $y$ .

**1276.** Визначте об'єм конуса як функцію його твірної  $x$  та висоти  $y$ .

**1277.** Вибрати із рівностей ті, які можна розглядати як значущі функції двох змінних  $z = f(x; y)$ :

а)  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ;

б)  $y = xz$ ;

в)  $z^2 + xy = 1$ ;

г)  $\ln(x+y) + \ln z^3 = 1$ ;

д)  $\frac{z}{\sqrt{x-y}} = \ln(y-x)$ .

**1278.** Для функції  $f(x; y) = \frac{x-y}{x+y}$  знайти:

а)  $f(3; 2)$ ;

б)  $f(-x; -y)$ ;

в)  $f(y; x)$ ;

г)  $f\left(\frac{1}{x}; \frac{1}{y}\right)$ ;

д)  $f(x+y; x-y)$ ;

е)  $f(tx; ty)$ .

**1279.** Для функції  $f(x; y) = \frac{x^2 - xy + y^2}{x^2 + xy + y^2}$  знайти:

а)  $f(1; 1)$ ;

б)  $f(-x; y)$ ;

в)  $f(-x; -y)$ ;

г)  $f(tx; ty)$ ;

д)  $f\left(\frac{1}{x}; \frac{1}{y}\right)$ ;

е)  $f(x+y; x-y)$ .

**1280.** Для функції  $f(x; y) = \frac{x}{x-y}$  знайти  $f(a; b) + f(b; a)$ .

**1281.** Знайти  $f(x; y)$ , якщо:

а)  $f(x+y; x-y) = y(x+y)$ ;

б)  $f\left(xy; \frac{y}{x}\right) = x^2 - y^2$ ;

в)  $f\left(x+y; \frac{y}{x}\right) = x^2 - y^2$ ;

г)  $f(x-y; x+y) = -\frac{2xy}{x^2 + y^2}$ .

**1282.** Знайти:

а)  $z = f(\ln(x+y); e^{xy})$ , якщо  $f(x; y) = x^4 y^2$ ;

б)  $z = f(e^{xy}; \sqrt{x^2 + y^3})$ , якщо  $f(x; y) = x^2 \sin(xy)$ ;

в)  $z = f(\sin(xy); \ln \operatorname{tg} x)$ , якщо  $f(x; y) = xy + x + y$ ;

г)  $z = f(3^{x+y}; \operatorname{tg} x)$ , якщо  $f(x; y) = \cos x^3 + y^2$ ;

д)  $z = f\left(xy; \frac{x}{y}\right)$ , якщо  $f(x; y) = \arccos(xy) + \operatorname{ctg}\left(\frac{y}{x}\right)$ .

**1283.** Знайти однорідні функції серед таких:

а)  $z = \frac{3x^2 - xy}{x + y}$ ;

б)  $z = (x + y)^2 + 2xy^2$ ;

в)  $z = (x + y)(3x - y) + x^2 - y^2$ ; г)  $z = x\sqrt{y} + y\sqrt{x}$ ;

д)  $z = \pi x + xy + \pi^2$ ;

е)  $z = \arcsin \frac{x}{y} + \ln x - \ln y$ ;

є)  $z = x^2 \sin y + y^2 \cos x$ ; ж)  $z = e^{\frac{x}{y}} + \ln(x - y) - \ln(x + y)$ ;

з)  $z = x^\pi \sin \frac{x}{y} + y^\pi \cos \frac{y}{x}$ .

Знайти та зобразити області визначення функцій двох змінних:

**1284.**  $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ .

**1285.**  $z = \ln(x^2 + y)$ .

**1286.**  $z = \log_x y$ .

**1287.**  $z = \arccos x + \arcsin y$ .

**1288.**  $z = \sqrt{4x^2 + 9y^2 - 36}$ .

**1289.**  $z = \arcsin \frac{x}{y}$ .

**1290.**  $z = \frac{1}{\sqrt{y - \sqrt{x}}}$ .

**1291.**  $z = \sqrt{x^2 - y^2 - 1}$ .

**1292.**  $z = \ln(x + y) - \ln(x - y)$ .

**1293.**  $z = \ln(xy)$ .

**1294.**  $z = \sqrt{\sin(x^2 + y^2)}$ .

**1295.**  $z = \frac{\sqrt{x - y}}{x + y}$ .

**1296.**  $z = \sqrt{x^2 - 4} + \sqrt{y^2 - 4}$ .

**1297.**  $z = \sqrt{-(x - y)^2}$ .

**1298.**  $z = \sqrt{8x^2 - 2x - y}$ .

**1299.**  $z = \arccos \frac{x}{x + y}$ .

**1300.**  $z = \sqrt{(4 - x^2 - y^2)(x^2 + y^2 - 1)}$ . **1301.**  $z = \frac{x}{\ln(x^2 + y^2)}$ .

$$1302. z = \operatorname{ctg}(\pi(x + y)).$$

$$1303. z = \frac{\sqrt{4x - y^2}}{\ln(1 - x^2 - y^2)}.$$

$$1304. z = \lg(1 - x^2 - y^2) - \sqrt{1 - y - |x|}.$$

$$1305. z = \arccos\left(\frac{3x}{y}\right).$$

$$1306. z = \lg(x^2 - 4y^2) - \sqrt{x^2 + y^2 - 4}.$$

$$1307. z = \sqrt{1 - \lg(x - y^2)}.$$

$$1308. z = \lg(4 - x - y) - \sqrt{y - \sqrt{x}}.$$

$$1309. z = \lg(y - |x + 1|) + \sqrt{3 - y}.$$

$$1310. z = \lg\left(y - \frac{1}{x}\right) - \sqrt{36 - 9x^2 - 4y^2}.$$

$$1311. z = \lg(4 - x^2 - y^2) - \sqrt{xy - 1}.$$

$$1312. z = \lg(x^2 + y^2 - 2) + \sqrt{2 - |x| - |y|}.$$

$$1313. z = \ln(-x^2 - y^2 - 2y) + \frac{1}{\sqrt{4x^2 - y^2}}.$$

$$1314. z = \ln(6 - 3x - 2y) + \sqrt{2x - y} + \sqrt{y}.$$

$$1315. z = \lg(y - x - 2) + \sqrt{\frac{1}{x} - y}. \quad 1316. z = \frac{\lg(4x^2 + 9y^2 - 36)}{\sqrt{y^2 - |x|}}.$$

1317. Знайти лінії рівнів даних функцій та встановити характер поверхонь, що відображають ці функції:

а)  $z = x + y$ ;

б)  $z = x^2 + y^2$ ;

в)  $z = x^2 - y^2$ ;

г)  $z = \frac{y}{x^2}$ ;

д)  $z = \frac{2x}{x^2 + y^2}$ ;

е)  $z = 1 - |x| - |y|$ .

**1318.** Знайти лінії рівнів таких функцій:

а)  $z = \ln(x^2 + y)$ ;

б)  $z = \arcsin(xy)$ ;

в)  $z = f\left(\frac{y}{x}\right)$ ;

г)  $z = f(\sqrt{x^2 + y^2})$ ;

д)  $z + x \ln z + y = 0$ ;

е)  $z = \min(x; y)$ .

**1319.** Визначте поверхні рівнів таких функцій:

а)  $u = x + y + z$ ;

б)  $u = x^2 + y^2 + z^2$ ;

в)  $u = x^2 + y^2 - z^2$ ;

г)  $u = 2^{x^2 + y^2 + z^2}$ ;

д)  $u = \frac{x^2 + y^2}{z}$ ;

е)  $u = \ln \frac{1 + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{1 - \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ .

**1320.** Серед нижченаведених тверджень виберіть правильні:

а)  $\left( \lim_{x \rightarrow x_0} f(x; y_0) = A \right) \Rightarrow \left( \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x; y) = A \right)$ ;

б)  $\left( \begin{matrix} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x; y_0) = A \\ \lim_{y \rightarrow y_0} f(x_0; y) = A \end{matrix} \right) \Rightarrow \left( \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x; y) = A \right)$ ;

в)  $\left( \begin{matrix} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x; y_0) = A \\ \lim_{y \rightarrow y_0} f(x_0; y) = A \end{matrix} \right) \Leftarrow \left( \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x; y) = A \right)$ ;

г)  $\left( \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x; y) = f(x_0; y_0) \right) \Leftrightarrow \left( \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \Delta z = 0 \right)$ ;

д)  $\left( \begin{matrix} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta_x z = 0 \\ \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \Delta_y z = 0 \end{matrix} \right) \Leftrightarrow \left( \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x; y) = f(x_0; y_0) \right)$ ;

е)  $\left( \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} (\Delta_x z + \Delta_y z) = 0 \right) \Leftrightarrow \left( \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x; y) = f(x_0; y_0) \right)$ ,

де  $\Delta z, \Delta_x z, \Delta_y z$  — відповідно повний і частинні прирости функції в точці  $M_0(x_0; y_0)$ .

Знайти границі функцій:

$$1321. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 2}} \frac{\sin(xy)}{x}.$$

$$1322. \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \frac{x+y}{x^2+y^2}.$$

$$1323. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}.$$

$$1324. \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow 2}} \left(1 + \frac{y}{x}\right)^x.$$

$$1325. \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \frac{x+y}{x^2 - xy + y^2}.$$

$$1326. \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \left(\frac{xy}{x^2 + y^2}\right)^{x^2}.$$

$$1327. \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow k}} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}.$$

$$1328. \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\ln(x + e^y)}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

$$1329. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (x+y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y}.$$

$$1330. \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} (x^2 + y^2) e^{-(x+y)}.$$

$$1331. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2} - 1}.$$

$$1332. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sqrt{x^2 y^2 + 1} - 1}{x^2 + y^2}.$$

$$1333. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}.$$

$$1334. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{1 - \cos(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)x^2 y^2}.$$

$$1335. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{e^{\frac{1}{x^2 + y^2}}}{x^4 + y^4}.$$

$$1336. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (1 + x^2 y^2)^{\frac{1}{x^2 + y^2}}.$$

1337. Із функцій:

$$\text{а) } f_1(x; y) = \sin(x^2 + y^2)^{-1}; \quad \text{б) } f_2(x; y) = \sqrt{\sin \pi(x^2 + y^2)};$$

$$\text{в) } f_3(x; y) = \begin{cases} \frac{\sin xy}{y}, & y \neq 0; \\ 1, & y = 0 \end{cases}; \quad \text{г) } f_4(x; y) = \begin{cases} \frac{x-y}{x^2 - y^2}, & x \neq y; \\ \frac{1}{x+y}, & x = y \end{cases}$$

виберіть ті, які неперервні в області  $D = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 1\}$ .

1338. Якщо функція  $z = f(x; y)$  неперервна в кожній точці деякої множини  $D$ , яка має лише внутрішні точки, то ця функція на множині  $D$  має такі властивості: а) неперервна; б) обмежена; в) набуває кожного проміжного значення між її найменшим та найбільшим значеннями. (Виберіть правильну відповідь.)

**1339.** Знайти точки розриву таких функцій:

а)  $z = \frac{1}{(x-y)^2}$ ;                      б)  $z = \frac{1}{x^2 + y^2 - 1}$ ;

в)  $z = \sin \frac{1}{xy}$ ;                      г)  $z = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ ;

д)  $z = \frac{1}{1 - e^{xy}}$ ;                      е)  $z = \frac{x}{x^4 - y^4}$ .

**1340.** Дослідити неперервність у точці  $M_0(0; 0)$  функцій  $z = f(M)$ ,  $M(x; y)$ :

а)  $z = \begin{cases} 0, & M = M_0; \\ \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}, & M \neq M_0; \end{cases}$       б)  $z = \begin{cases} 0, & M = M_0; \\ \frac{xy}{x^2 + y^2}, & M \neq M_0; \end{cases}$

в)  $z = \begin{cases} 0, & M = M_0; \\ \frac{1}{x^2 + y^2}, & M \neq M_0; \end{cases}$       г)  $z = \begin{cases} 0, & M = M_0; \\ \frac{x^4 - y^4}{x^4 + y^4}, & M \neq M_0. \end{cases}$

**1341.** Дослідити неперервність функції:

$$z = \begin{cases} \sqrt{1 - x^2 - y^2}; & x^2 + y^2 \leq 1; \\ 0; & x^2 + y^2 > 1. \end{cases}$$

#### **4.2. Похідні та диференціали функцій багатьох змінних**

**Завдання** (для підготовки до практичних занять: 1342—1364, 1389, 1432, 1441, 1447, 1454; для аудиторних занять: 1374—1376, 1393, 1395, 1399, 1408, 1411, 1413 а), 1425, 1435, 1449, 1455; домашні: 1365, 1369, 1378, 1382, 1383, 1392, 1396, 1402, 1410, 1412, 1423, 1424, 1436, 1444, 1446, 1450, 1459; додаткові: 1380, 1386, 1388, 1398, 1405, 1408, 1413, 1416, 1431, 1439, 1443, 1452).

*Закінchte вирази:*

**1342.** Частинною похідною функції  $z = f(M)$ ,  $M \in R^n$  називається ...

**1343.** Частинним диференціалом функції багатьох змінних називається ...

**1344.** Повним диференціалом функції багатьох змінних називається ...

**1345.** Функція багатьох змінних називається диференційовною в точці  $M_0$ , якщо ...

**1346.** Знайдіть частинні та повний прирости функції  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  у точці  $M_0(3; 4)$  при  $\Delta x = 0,1$ ,  $\Delta y = 0,2$ .

**1347.** Знайдіть за означенням частинні похідні функції  $z = x^2 y$ .

**1348.** Нехай маємо такі умови для  $z = f(M)$  у точці  $M_0$ :

- 1)  $z = f(M)$  — диференційовна;
- 2) існують частинні похідні функції;
- 3) існує рівність  $\Delta z = z'_x \Delta x + z'_y \Delta y + \alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y$ , де  $\alpha$  і  $\beta$

нескінченно малі при  $\begin{cases} \Delta x \rightarrow 0, \\ \Delta y \rightarrow 0; \end{cases}$

- 4) існує повний диференціал функції.

Вибрати правильні з таких послідовностей тверджень:

- а)  $① \Rightarrow ② \Rightarrow ④ \Rightarrow ③$ ;
- б)  $④ \Rightarrow ① \Rightarrow ② \Rightarrow ③$ ;
- в)  $④ \Rightarrow ② \Rightarrow ①$ ;
- г)  $③ \Rightarrow ④ \Rightarrow ① \Rightarrow ②$ .

Якщо всі твердження неправильні, то напишіть правильне.

**1349.** Які з умов будуть достатніми, а які необхідними для існування повного диференціала функції?

- а) існування частинних диференціалів функції;
- б) неперервність функції;
- в) неперервність частинних похідних функції;
- г) існування рівності 3) із завдання 1348.

**1350.** Частинною похідною другого порядку функції багатьох змінних називається ...

**1351.** Виберіть достатню умову існування рівності  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$  у точці  $M_0(x_0; y_0)$  з наведених далі умов:

- а) обмеженість частинних похідних будь-якого порядку;
- б) існування частинних похідних другого порядку;
- в) неперервність похідних першого порядку в точці  $M_0$  та в деякому її околі;
- г) неперервність похідних другого порядку.

**1352.** Повним диференціалом  $n$ -го порядку функції багатьох змінних називається ...

**1353.** Формула повного диференціала 2-го порядку функції  $z = f(x; y)$  має вигляд: ...

**1354.** Якщо  $z = f(x; y)$ , а  $x = \varphi(u; v)$ ,  $y = \psi(u; v)$ ; то похідні складної функції  $z'_u, z'_v$  мають вигляд: ...

**1355.** Похідна  $y'_x$  неявної функції  $F(x; y) = 0$  через частинні похідні обчислюється за такою формулою: ...

**1356.** Формула наближених обчислень за допомогою повного диференціала функції  $z = f(x; y)$  така: ...

**1357.** Якобіаном функцій  $x = \varphi(u; v)$ ,  $y = \psi(u; v)$  називається ...

**1358.** Рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні  $z = f(x; y)$  або  $F(x; y; z) = 0$  такі: ...

**1359.** Похідною функції  $u = f(x; y; z)$  за напрямом у точці  $M_0(x_0; y_0; z_0)$  називається ...

**1360.** Градієнтом функції багатьох змінних називається ...

Виберіть правильні із нижченаведених тверджень (1361—1363):

**1361.** Градієнт функції  $z = f(x; y)$  у певній точці:

- а) дорівнює максимальному значенню функції в цій точці;
- б) є вектором з координатами  $\{(z'_x)^2; (z'_y)^2\}$ ;
- в) визначає напрям найбільшого зростання функції у цій точці;
- г) є вектором з координатами  $\{z'_x; z'_y\}$ .

**1362.** Похідна функції  $u = f(x; y; z)$  за даним напрямом  $\vec{s}_0 (|\vec{s}_0| = 1)$  має такі властивості:

- а) є вектором зростання функції;
- б) дорівнює  $\vec{s}_0 \cdot \overrightarrow{\text{grad } u}$ ;
- в) набуває мінімального значення, якщо  $\vec{s}_0 \perp \overrightarrow{\text{grad } u}$ ;
- г) набуває максимального значення, якщо  $\vec{s}_0 \uparrow \uparrow \overrightarrow{\text{grad } u}$ .

**1363.**  $z = f(x; y)$ ,  $f(x; y) = \sin(xy) + a \cos x$ , тоді:

- а)  $z'_x = y \cos(xy) + \cos x - a \sin x$ ;
- б)  $z'_x = y \cos(xy) - a \sin x$ ;

$$\text{в) } z'_y = x \sin(xy);$$

$$\text{г) } z'_y = x \sin(xy) - a \sin x;$$

$$\text{д) } z'_y = \sin x.$$

Знайти частинні похідні функцій:

$$1364. z = x^2 + y^3 - 2axy.$$

$$1365. z = x^2 y^3 - \sqrt{x+y}.$$

$$1366. z = \frac{x+y}{x+y+1}.$$

$$1367. z = (x+y)\sqrt{x-y}.$$

$$1368. u = \frac{xy}{z} + (xy)^z.$$

$$1369. z = \ln(2x^2 - y^2).$$

$$1370. z = \arcsin\left(\frac{y}{x}\right).$$

$$1371. z = x \cdot e^{\frac{\sin x}{y}}.$$

$$1372. z = \ln \operatorname{tg}\left(\frac{x}{y}\right).$$

$$1373. z = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy}.$$

$$1374. z = \ln\left(y + \sqrt{x^2 + y^2}\right).$$

$$1375. u = z^{xy}.$$

$$1376. z = \ln \frac{x^2 \sin(x+y)}{y^2 \cos(x+y)}.$$

$$1377. z = x^{\sin y} + y^{\sin x}.$$

$$1378. u = z^{(\operatorname{ctg} y)^x}.$$

$$1379. u = x^{y^z}.$$

$$1380. u = z^{\operatorname{arctg} x + y^2}.$$

$$1381. u = \left(x + \frac{y}{z}\right)^{x-y}.$$

$$1382. u = (1 + \log_y x)^z.$$

Обчислити частинні похідні функцій:

$$1383. z = \ln \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \text{ у точці } (1; 1).$$

$$1384. z = x^2 y^3 + \sqrt{x^2 y} \text{ у точці } (-1; 1).$$

$$1385. z = \ln\left(x + \frac{y}{2x}\right) \text{ у точці } (1; 2).$$

$$1386. z = \frac{(x+y)^3 - 3xy(x+y)}{x^2 - xy + y^2} \text{ у точці } (0,1; 1,1).$$

$$1387. z = \ln(e^y \cos x + e^x \sin y) \text{ у точці } (0; 0).$$

$$1388. u = x^2 y \sqrt{z} + x^2 \sqrt{y} \cdot z + \sqrt{x^2} yz \text{ у точці } (-1; 1; 1).$$

Знайти повні диференціали першого порядку функцій:

$$1389. z = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}.$$

$$1390. z = yx^y.$$

$$1391. z = 2^{\arctg^2(xy+y^2)}.$$

$$1392. z = x \cos(y^x).$$

$$1393. u = \left(xy + \frac{x}{y}\right)^z.$$

$$1394. u = \arctg \frac{xy}{z^2}.$$

$$1395. z = f(\sin xy; 2^y),$$

$$f(x; y) = x^3 y^2.$$

$$1396. z = f(3^{xy}; \operatorname{ctg} x),$$

$$f(x; y) = \sin x - xy^2.$$

$$1397. u = f\left(2^y; \sin(xz); \frac{y}{z}\right),$$

$$f(x; y; z) = x^2 + y^2 - z.$$

$$1398. u = f(\ln xz; \arctg x; 2^y),$$

$$f(x; y; z) = x - 2y + z.$$

Обчислити наближено:

$$1399. 1,002 \cdot (2,003)^2 \cdot (3,004)^3.$$

$$1400. \sqrt{(1,02)^3 + (1,97)^2}.$$

$$1401. 0,97^{1,05}.$$

$$1402. \sqrt{5e^{0,02} + (2,03)^2}.$$

$$1403. \sin 29^\circ \cdot \operatorname{tg} 46^\circ.$$

$$1404. \frac{(1,03)^2}{\sqrt[3]{0,98} \cdot \sqrt[4]{(1,05)^3}}.$$

$$1405. \ln(\sqrt[3]{1,03} + \sqrt[4]{0,98} - 1).$$

$$1406. \text{ Знайти } \frac{dz}{dt}, \text{ якщо: } z = \frac{x}{y}; x = e^t; y = \ln t.$$

$$1407. \text{ Знайти } \frac{dz}{dt}, \text{ якщо: } z = \ln \sin \frac{x}{\sqrt{y}}; x = 3t^2; y = \sqrt{t^2 + 1}.$$

1408. Знайти  $\frac{du}{dt}$ , якщо:  $u = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ ,  $x = R \cos t$ ;  $y = R \sin t$ ;  $z = H$ .

1409. Знайти  $\frac{\partial z}{\partial x}$  та  $\frac{\partial z}{\partial y}$ , якщо:  $z = \arctg \frac{u}{v}$ ;  $u = x^2 - y$ ;  $V = y^2 - x$ .

1410. Знайти  $\frac{\partial z}{\partial x}$  та  $\frac{\partial z}{\partial y}$ , якщо:  $z = 2^{u+v}$ ;  $u = \sin(xy)$ ;  $v = \cos(xy)$ .

1411. Обчислити якобіан  $\frac{D(x; y)}{D(r, \varphi)}$  для:

$$\text{а) } \begin{cases} x = r \cos \varphi; \\ y = r \sin \varphi; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x = ar \cos \varphi; \\ y = br \sin \varphi. \end{cases}$$

1412. Обчислити якобіан  $\frac{D(y_1, y_2, y_3)}{D(x, y, z)}$  для:

$$\begin{cases} y_1 = xe^y \sin z; \\ y_2 = ye^z \sin x; \\ y_3 = ze^x \sin y; \end{cases} \text{ в точці } M\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}; -\frac{\pi}{2}\right).$$

1413. Знайти  $\frac{dy}{dx}$  для неявної функції  $y(x)$ , якщо:

а)  $(x^2 + y^2)^3 - 3(x^2 + y^2) + 1 = 0$ ;    б)  $x^2 + y^2 + 2axy = 0$ ;

в)  $y = 1 + y^x$ ;    г)  $y = x + \ln y$ ;

д)  $xe^y + \sin xy + 1 = 0$ .

1414. Обчислити  $\frac{dy}{dx}$  при  $x = 1$ , якщо:

$$x^2 - 2xy + y^2 + x + y - 2 = 0.$$

1415. Обчислити  $\frac{dy}{dx}$  при  $x = 0$ , якщо:

$$\ln \sqrt{x^2 + y^2} = \arctg \frac{x}{y}.$$

**1416.** Знайти  $\frac{\partial z}{\partial x}$  та  $\frac{\partial z}{\partial y}$  для функцій:

а)  $x^3 + 2y^3 + z^3 - 3xy - 2y + 3 = 0$ ;

б)  $x \cos y + y \cos z + z \cos x = 1$ ;

в)  $x^2 + y^2 - z^2 - xy = 0$ ;

г)  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ .

Знайти похідні другого порядку  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ ,  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ ,  $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$  для таких функцій:

**1417.**  $z = \frac{1}{3} \sqrt{(x^2 + y^2)^3}$ .

**1418.**  $z = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$ .

**1419.**  $z = c \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}$ .

**1420.**  $z = \ln(x^2 + y)$ .

**1421.**  $z = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy}$ .

**1422.**  $z = \sin^2(ax + by)$ .

**1423.**  $z = e^{xe^y}$ .

**1424.**  $z = \frac{x-y}{x+y}$ .

**1425.**  $z = y^{\ln x}$ .

**1426.**  $z = \arcsin(xy)$ .

**1427.**  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ .

**1428.**  $z^3 - 3xyz = a^3$ .

**1429.**  $x + y + z = e^z$ .

**1430.**  $z = \sqrt{x^2 - y^2} \cdot \operatorname{tg} \frac{z}{x^2 - y^2}$ .

**1431.**  $x + y + z = e^{-(x+y+z)}$ .

Знайти повний диференціал другого порядку  $d^2 z$ , якщо:

**1432.**  $z = xy^2 - x^2 y$ .

**1433.**  $z = \ln(x - y)$ .

**1434.**  $z = \frac{1}{2(x^2 + y^2)}$ .

**1435.**  $z = x \sin^2 y$ .

**1436.**  $z = e^{xy}$ .

**1437.**  $z = x \ln \frac{y}{x}$ .

**1438.** Знайти  $d^2u$ , якщо  $u = xyz$ .

Знайти  $d^2z$ , якщо:

**1439.**  $z = x + \operatorname{arctg} \frac{y}{z-x}$ .

**1440.**  $\frac{x}{z} = \ln \frac{z}{y} + 1$ .

**1441.** Знайти похідну  $\frac{\partial u}{\partial s}$  функції  $u = xyz$  у точці  $M(1; 2; 1)$  за напрямом, що утворює із осями координат рівні гострі кути.

**1442.** Знайти похідну  $\frac{\partial z}{\partial s}$  функції  $z = x^3 - 2x^2y + xy^2 + 1$  у точці  $M(1; 2)$  за напрямом від точки  $M$  до точки  $N(4; 6)$ .

**1443.** Знайти похідну  $\frac{\partial u}{\partial s}$  функції  $u = xy + yz + zx$  у точці  $M(2; 1; 3)$  за напрямом вектора  $\overrightarrow{MN}$ , де  $N(5; 5; 15)$ .

**1444.** Знайти похідну  $\frac{\partial u}{\partial s}$  функції  $u = xy^2 + z^3 - xyz$  у точці  $M(1; 1; 2)$  за напрямом, що утворює з осями координат кути відповідно  $60^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ .

**1445.** Знайти похідну  $\frac{\partial u}{\partial s}$  функції  $u = 6x\sqrt{y^4z^2} - yzx^4 - 2xyz$  у точці  $M(-1; 2; -1)$  за напрямом найбільшого зростання функції.

**1446.** Знайти  $\frac{\partial z}{\partial s}$  функції  $z = \ln^3(xy^2 + x^3 - 3xy)$  у точці  $M(1; 3)$  за напрямом бісектриси четвертого координатного кута.

**1447.** Знайти  $\overrightarrow{\operatorname{grad} z}$  у точці  $M(2; 1)$ , якщо  $z = x^3 + y^3 - 3xy$ .

**1448.** Знайти величину і напрям  $\overrightarrow{\operatorname{grad} u}$  в точці  $M(2; -2; 1)$ , якщо  $u = x^2 + y^2 + z^2$ .

**1449.** Знайти кут між градієнтами функції  $z = \ln \frac{y}{x}$  у точках  $A\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$  і  $B(1; 1)$ .

**1450.** Знайти кут між градієнтами функції  $z = \operatorname{arccotg} \frac{y-x}{x+y}$  у точках  $M(2; -1)$  та  $M_2(-2; 6)$ .

**1451.** Знайти в точці  $M(3; 4)$  кут між градієнтами функцій:  
 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  та  $z = x - 3y + \sqrt{3xy}$ .

**1452.** Знайти напрям найбільшої зміни функції  $u = x \sin z - y \cos z$  у початку координат.

**1453.** Знайдіть точку, в якій градієнт функції  $z = \ln\left(x + \frac{1}{y}\right)$  дорівнює  $\vec{i} - \frac{16}{9} \vec{j}$ .

**1454.** Функції  $\varphi(x)$  та  $\psi(x)$  — диференційовні. Доведіть, що:

а)  $\overrightarrow{\text{grad}}(\varphi + \psi) = \overrightarrow{\text{grad}} \varphi + \overrightarrow{\text{grad}} \psi$ ;

б)  $\overrightarrow{\text{grad}}(\varphi \cdot \psi) = \varphi \overrightarrow{\text{grad}} \psi + \psi \overrightarrow{\text{grad}} \varphi$ .

Знайти рівняння дотичної площини до поверхні:

**1455.**  $z = x^2 + 2y^2$  у точці  $(1; 1; 3)$ .

**1456.**  $xy = z^2$  у точці  $(-1; -1; 1)$ .

**1457.**  $xyz = a^3$  у точці  $(a; a; a)$ .

**1458.**  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$  в точці  $(a; b; c)$ .

**1459.** Знайти рівняння площини, дотичної до поверхні  $x^2 + 4y^2 + z^2 = 36$  та паралельної площині  $x + y - z = 0$ .

**1460.** Знайти рівняння нормалі в точці  $(3; 4; 5)$  до поверхні конуса  $x^2 + y^2 = z^2$ .

**1461.** Знайти кути з осями координат нормалі до поверхні  $x^2 + y^2 - xz - yz = 0$  в точці  $(0; 2; 2)$ .

**1462.** Визначте суму квадратів довжин відрізків, що відтинаються на координатних осях площиною, дотичною до поверхні  $\frac{2}{x^3} + \frac{2}{y^3} + \frac{2}{z^3} = a^{\frac{2}{3}}$ .

**1463.** Визначте віддаль від початку координат до площини, дотичної до поверхні  $(2a^2 - z^2)x^2 - a^2y^2 = 0$  в точці  $(a; a; a)$ .

### 4.3. Екстремуми функції багатьох змінних

**Завдання** (для підготовки до практичних занять: 1464, 1473, 1475, 1495, 1509; для аудиторних занять: 1474 а), 1484, 1497, 1513, 1526 а), 1527; домашні: 1474 б), 1476, 1479, 1485, 1488, 1489, 1494, 1499, 1501, 1512, 1525; додаткові: 1483, 1490, 1494, 1500, 1516, 1520, 1529, 1531).

*Закінchte вирази:*

**1464.** Точка  $M_0 \in R^n$  називається точкою максимуму (мінімуму) функції  $z = f(M)$ ,  $M \in R^n$ , якщо ...

**1465.** Точка  $M_0 \in R^n$  називається стаціонарною для функції  $z = f(M)$ ,  $M \in R^n$ , якщо: ...

**1466.** Необхідні умови екстремуму функції багатьох змінних полягають у тому, що ...

**1467.** Формула Тейлора для функції двох змінних має вигляд: ...

**1468.** Критерій Сільвестра додатної визначеності квадратичної форми має вигляд: ...

**1469.** Умови від'ємної визначеності квадратичної форми такі: ...

**1470.** Достатні умови існування екстремуму функції багатьох змінних формулюються так: ...

**1471.** Поняття умовного екстремуму функції багатьох змінних полягає у тому, що ...

**1472.** Задача про умовний екстремум функції багатьох змінних  $z = f(M)$ ,  $M \in R^n$  при  $\varphi(M) = 0$  зводиться до задачі про звичайний екстремум функції ...

**1473.** Вкажіть правильний розв'язок задачі.

Для знаходження найбільшого значення функції  $z = f(x; y)$  у замкненій області  $D$  з рівнянням межі  $\varphi(x; y) = 0$  потрібно вибрати найбільше значення із обчислених у таких точках:

а) в стаціонарних точках області  $D$ ;

б) у точках умовного екстремуму функції  $z = f(x; y)$  за умови  $\varphi(x; y) = 0$ ;

в) у стаціонарних точках і точках умовного екстремуму функції  $z = f(x; y)$  при  $\varphi(x; y) = 0$ ;

г) у стаціонарних точках і точках на межі області  $D$ .

**1474.** Розкладіть за формулою Тейлора в точці  $(0; 0)$  до членів третього порядку включно такі функції:

а)  $f(x; y) = e^x \sin y$ ;      б)  $f(x; y) = \cos x \cos y$ ;

в)  $f(x; y) = e^{x+y}$ ;      г)  $f(x; y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ .

Дослідити на екстремум функції:

**1475.**  $z = x^2 - xy + y^2 - 9x - 6y + 20$ .

**1476.**  $z = x^2 + (y - 1)^2$ .

**1477.**  $z = x^2 - (y - 1)^2$ .

**1478.**  $z = x^2 - xy + y^2 - 2x + y$ .

**1479.**  $z = x^2 y^3 (6 - x - y)$ ;  $x > 0$ ;  $y > 0$ .

**1480.**  $z = x^3 + y^3 - 3xy$ .

**1481.**  $z = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$ .

**1482.**  $z = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}$  ( $x > 0$ ,  $y > 0$ ).

**1483.**  $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$ .

**1484.**  $z = e^{x-y} (x^2 - 2y^2)$ .

**1485.**  $z = e^{2x+3y} (8x^2 - 6xy + 3y^2)$ .

**1486.**  $z = e^{x^2-y} (5 - 2x + y)$ .

**1487.**  $z = x^2 + xy + y^2 - 4 \ln x - 10 \ln y$ .

**1488.**  $z = xy \ln (x^2 + y^2)$ .

**1489.**  $z = \sin x + \cos y + \cos(x - y)$   $\left( \{x; y\} \in \left[ 0; \frac{\pi}{2} \right] \right)$ .

**1490.**  $z = \sin x \sin y \sin(x + y)$  ( $\{x; y\} \in [0; \pi]$ ).

$$1491. u = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z.$$

$$1492. u = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z.$$

$$1493. x^3 - y^2 - 3x + 4y + z^2 + z - 8 = 0.$$

$$1494. x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 10 = 0.$$

Знайти умовні екстремуми функцій:

$$1495. z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \text{ при } x + y = 2.$$

$$1496. z = x + y \text{ при } \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{2}.$$

$$1497. z = x + 2y \text{ при } x^2 + y^2 = 5.$$

$$1498. z = xy \text{ при } x + y = 1.$$

$$1499. z = x^2 + 12xy + 2y^2 \text{ при } 4x^2 + y^2 = 25.$$

$$1500. z = x^2 + y^2 \text{ при } \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1.$$

$$1501. z = xy \text{ при } x^2 + y^2 = 2.$$

$$1502. z = \cos^2 x + \cos^2 y \text{ при } y - x = \frac{\pi}{4}.$$

$$1503. z = x^2 + y^2 \text{ при } x^2 + y^2 - 6y = 0.$$

$$1504. z = x^2 + 2y^2 \text{ при } x^2 + y^2 - 2y = 0.$$

$$1505. z = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \text{ при } x + y = 12.$$

$$1506. u = x - 2y + 2z \text{ при } x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

$$1507. u = xyz \text{ при } x^2 + y^2 + z^2 = 1; x + y + z = 0.$$

$$1508. u = xy + yz \text{ при } x^2 + y^2 = 2; y + z = 2; x > 0; y > 0; z > 0.$$

Знайти найбільше та найменше значення функції у заданих областях:

**1509.**  $z = 1 + x + 12y$ , якщо:  $x \geq 0$ ;  $y \geq 0$ ;  $x + y \leq 1$ .

**1510.**  $z = x^2 y$ , якщо:  $x^2 + y^2 \leq 1$ .

**1511.**  $z = x^3 + y^3 - 3xy$ , якщо:  $0 \leq x \leq 2$ ;  $-1 \leq y \leq 2$ .

**1512.**  $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y$ , якщо:  $0 \leq x \leq 1$ ;  $0 \leq y \leq 2$ .

**1513.**  $z = x^2 + y^2 - 12x + 16y$ , якщо:  $x^2 + y^2 \leq 25$ .

**1514.**  $z = x^2 - xy + y^2$ , якщо:  $|x| + |y| \leq 1$ .

**1515.**  $z = x^2 - y^2$ , якщо:  $x^2 + y^2 \leq 4$ .

**1516.**  $z = e^{-x^2-y^2}(2x^2 + 3y^2)$ , якщо:  $x^2 + y^2 \leq 4$ .

**1517.**  $z = \sin x + \sin y + \sin(x + y)$ , якщо:  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ ;  $0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ .

**1518.**  $u = x^2 + 2y^2 + 3z^2$ , якщо:  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 100$ .

**1519.**  $u = x + y + z$ , якщо:  $x^2 + y^2 \leq z \leq 1$ .

**1520.** Число  $a > 0$  розкласти на  $n$  співмножників так, щоб сума їх обернених величин була найменшою, та знайти цю суму.

**1521.** На які  $n$  доданків треба розкласти число  $a > 0$ , щоб сума їх квадратів була найменшою?

**1522.** Визначити лінійні розміри прямокутного відкритого басейну об'ємом  $V$ , що має найменшу площу поверхні.

**1523.** На гіперболі  $x^2 - y^2 = 4$  знайти точку, найменш віддалену від точки  $(0; 2)$ .

**1524.** Визначити рівнобедрений  $\triangle ABC$  найменшої площі, який вписаний в еліпс  $x^2 + 3y^2 = 12$  так, що його основа  $AC$  паралельна великій осі еліпса.

**1525.** Знайти найбільший об'єм прямокутного паралелепіпеда за умови, що довжина його діагоналі дорівнює  $2\sqrt{3}$ .

**1526.** На площині  $Oxy$  знайти точку, сума квадратів віддалей якої буде найменшою від таких прямих:

а)  $x = 0$ ;  $y = 0$ ;  $x + 2y - 16 = 0$ ;

б)  $x = 0$ ;  $y = 0$ ;  $x - y + 1 = 0$ .

**1527.** На параболі  $y^2 = 4x$  знайти точку, найменш віддалену від прямої  $x - y + 4 = 0$ .

**1528.** Знайти найбільшу площу прямокутника, вписаного в еліпс  $4x^2 + y^2 = 1$ .

**1529.** На параболі  $x^2 + 2xy + y^2 + 4y = 0$  знайти точку, найменш віддалену від прямої  $3x - 6y + 4 = 0$ .

**1530.** Знайти сторони прямокутника, що має периметр  $2p$ , який обертанням навколо однієї зі своїх сторін утворює тіло найбільшого об'єму.

**1531.** На підставі даних про продуктивність праці робітника у за певну годину  $x$  8-годинного робочого дня знайти залежність між змінними  $y$  та  $x$  за методом найменших квадратів та обчислити продуктивність праці робітника у при  $x = 3$  та  $x = 7$ :

|     |   |    |    |    |   |
|-----|---|----|----|----|---|
| $x$ | 1 | 2  | 4  | 5  | 8 |
| $y$ | 7 | 11 | 17 | 15 | 5 |

---

### 5.1. Невизначений інтеграл. Найпростіші методи інтегрування

**Завдання** (для підготовки до практичних занять: 1532—1546, 1561, 1579, 1623; для аудиторних занять: 1559, 1560, 1570, 1571, 1595, 1600, 1634, 1635; домашні: 1547—1556, 1562—1569, 1580—1596, 1624—1628; додаткові: 1557, 1558, 1575, 1578, 1601—1606, 1610—1622, 1638).

*Закінchte вирази:*

**1532.** Первісною називається ...

**1533.** Операції знаходження для функції похідної і первісної співвідносяться між собою як ...

**1534.** Теорема про множину первісних функцій формулюється так: ...

**1535.** Задача інтегрування функції на деякому проміжку полягає в тому, щоб ...

**1536.** Теоретичною основою розв'язання задачі інтегрування функції є теорема про ...

**1537.** Невизначеним інтегралом називається ...

**1538.** Які з наведених нижче функцій будуть первісними для функції  $f(x) = 3e^{3x}$  ?

а)  $F_1(x) = e^x$  ;

б)  $F_2(x) = e^{x+3}$  ;

в)  $F_3(x) = e^{3x}$  ;

г)  $F_4(x) = \frac{1}{3}e^{3x} + 6$  ;

д)  $F_5(x) = (e^x)^3 + 10$  .

(Зазначте правильну відповідь.)

**1539.** Які з наведених функцій будуть первісними для функції  $f(x) = \cos x$  ?

а)  $F_1(x) = \sin x + 2$ ;

б)  $F_2(x) = 3 \sin \frac{x}{3} + 3$ ;

в)  $F_3(x) = 2 \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$ .

**1540.** Які з наведених нижче функцій не будуть первісними для функції  $f(x) = \operatorname{tg} x$  ?

а)  $F_1(x) = -\ln|\cos x|$ ;

б)  $F_2(x) = \frac{1}{2} \ln(1 + \operatorname{tg}^2 x)$ ;

в)  $F_3(x) = \frac{1}{2} \ln\left|\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right|$ ;

г)  $F_4(x) = \frac{1}{2} \ln(1 + \operatorname{ctg}^2 x) + \ln|\operatorname{tg} x|$ .

**1541.** Функції  $F_1(x) = \arcsin x + 2$  і  $F_2(x) = \arcsin|x| + 3$  будуть первісними для функції  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  за умови, що ...

**1542.** Первісні  $F_1(x) = \operatorname{arctg} x$  та  $F_2(x) = -\operatorname{arctg} \frac{1}{x} + \frac{\pi}{2}$  для функції  $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$  однакові при  $x = 1$  і різні при  $x = -1$ . Поясніть, чому це так.

**1543.** Відомо, що деякі дві первісні для функції  $f(x) = e^x$  відрізняються між собою на 1 при  $x = 1$ . Наскільки вони будуть відрізнятися при  $x = 100$  ?

**1544.** Для функцій:

а)  $f_1(x) = \frac{1}{\ln x}$ ;

б)  $f_2(x) = a^x$ ;

в)  $f_3(x) = \begin{cases} 10, & \text{якщо } x = 0; \\ \operatorname{ctg} x, & \text{якщо } x \neq 0 \end{cases}$

існують невизначені інтеграли за таких умов: ...

**1545.** Для функцій:

а)  $f_1(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x \geq 1; \\ 0, & \text{якщо } x < 1; \end{cases}$

б)  $f_2(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ ;

$$в) f_3(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x = 0; \\ \frac{\sin x}{x}, & \text{якщо } x \neq 0; \end{cases}$$

$$г) f_4(x) = e^{-x}; \quad д) f_5(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + a}}$$

існують невизначені інтеграли для будь-яких дійсних значень  $x$ . (Зазначте правильні твердження.)

**1546.** При знаходженні інтеграла  $\int \left( 2x^2 + \frac{3}{x} \right) dx$  треба скористатись такими властивостями невизначеного інтеграла, як ...

Використовуючи перетворення

$$\int f(ax+b)dx = \frac{a}{a} \int f(ax+b)dx = \frac{1}{a} \int f(ax+b)d(ax+b),$$

знайти такі інтеграли:

**1547.**  $\int (x+8)^{10} dx.$

**1548.**  $\int \sqrt{1-3x} dx.$

**1549.**  $\int e^{\frac{x}{2}} dx.$

**1550.**  $\int 2^{5x+4} dx.$

**1551.**  $\int \frac{dx}{10x+3}.$

**1552.**  $\int \frac{dx}{3-2x}.$

**1553.**  $\int \cos \frac{x+3}{3} dx.$

**1554.**  $\int \sin(4x+7) dx.$

**1555.**  $\int \frac{dx}{(5x+2)^2}.$

**1556.**  $\int \frac{dx}{\sqrt{9+4x^2}}.$

**1557.**  $\int \frac{dx}{9x^2-1}.$

**1558.**  $\int \frac{dx}{25+4x^2}.$

**1559.**  $\int \frac{dx}{\sqrt{4-25x^2}}.$

**1560.**  $\int \frac{d(x^2)}{\cos^2(2x^2+1)}.$

Розклавши підінтегральні функції за формулою

$$\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx,$$

знайти такі інтеграли:

**1561.**  $\int \frac{\sqrt{x+x^2}e^x-1}{x^2} dx.$

**1562.**  $\int tg^2 x dx.$

$$1563. \int \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)} dx.$$

$$1565. \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}.$$

$$1567. \int \frac{x^2}{x+2} dx.$$

$$1569. \int \frac{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}} dx.$$

$$1571. \int \frac{3 \cdot 2^x - 2 \cdot 3^x}{2^x} dx.$$

$$1573. \int \frac{x^2+3}{x^2-1} dx.$$

$$1575. \int \frac{e^{3x}+1}{e^x+1} dx.$$

$$1577. \int \frac{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}} dx.$$

$$1564. \int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx.$$

$$1566. \int \frac{x}{x-1} dx.$$

$$1568. \int \frac{x^3}{x+1} dx.$$

$$1570. \int x\sqrt{2x+1} dx.$$

$$1572. \int \sin^4 x dx.$$

$$1574. \int (2^x + 3^x)^2 dx.$$

$$1576. \int \frac{\sqrt{x^4 + x^{-4} + 2}}{x^3} dx.$$

$$1578. \int \operatorname{ctg}^2 x dx.$$

Безпосереднім інтегруванням знайти інтеграли:

$$1579. \int e^{\sin x} \cos x dx.$$

$$1580. \int \sin^2 x \cos x dx.$$

$$1581. \int \frac{dx}{x \ln^4 x}.$$

$$1582. \int \sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}} dx.$$

$$1583. \int (3+7x^2)^5 x dx.$$

$$1584. \int \frac{x^2 dx}{(4x^3+9)^4}.$$

$$1585. \int x e^{-x^2} dx.$$

$$1586. \int x^2 3^{x^3} dx.$$

$$1587. \int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx.$$

$$1588. \int \frac{5^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx.$$

$$1589. \int \frac{\operatorname{tg} x dx}{\cos^2 x}.$$

$$1590. \int \frac{\sin(\ln x)}{x} dx.$$

$$1591. \int \cos(e^x) e^x dx.$$

$$1592. \int \frac{\sin x}{1+\cos x} dx.$$

$$1593. \int \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2 + 1} dx.$$

$$1595. \int \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{1 + x^2} dx.$$

$$1597. \int \frac{e^{\operatorname{ctg} x}}{\sin^2 x} dx.$$

$$1599. \int \frac{\sin x dx}{\cos^2 x}.$$

$$1601. \int \frac{\ln \operatorname{tg} x}{\sin x \cos x} dx.$$

$$1603. \int \frac{dx}{x(\ln^2 x - 4)}.$$

$$1605. \int \frac{1}{1 - x^2} \ln \frac{1 + x}{1 - x} dx.$$

$$1594. \int \frac{2^x dx}{\sqrt{1 - 4^x}}.$$

$$1596. \int \frac{\sqrt[3]{1 + \ln x}}{x} dx.$$

$$1598. \int \frac{e^{\arcsin x}}{\sqrt{1 - x^2}} dx.$$

$$1600. \int \frac{\sin 2x}{\sqrt{3 - \cos^2 x}} dx.$$

$$1602. \int \frac{\cos 2x dx}{1 + \sin x \cos x}.$$

$$1604. \int \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx.$$

$$1606. \int \frac{xdx}{\sqrt{1 + x^2} \sqrt{1 + x^2 + \sqrt{(1 + x^2)^3}}}.$$

Знайти інтеграли, використовуючи найпростіші методи інтегрування:

$$1607. \int \frac{x + \arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}} dx.$$

$$1609. \int \frac{x^2 + \operatorname{arctg} x}{1 + x^2} dx.$$

$$1611. \int \frac{\cos^3 x + \sin x}{\cos x} dx.$$

$$1613. \int \frac{1 - \sin x}{x + \cos x} dx.$$

$$1615. \int \frac{\operatorname{tg} 3x - \operatorname{ctg} 3x}{\sin 3x} dx.$$

$$1617. \int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt[3]{\sin x - \cos x}} dx.$$

$$1619. \int \frac{x^2}{(1 - x)^{100}} dx.$$

$$1608. \int \frac{x + \ln(x - 2)}{x - 2} dx.$$

$$1610. \int \frac{\sin^2 x + \cos x}{\sin x} dx.$$

$$1612. \int \frac{x^2 - \ln(x + 2)}{x + 2} dx.$$

$$1614. \int \frac{dx}{\sqrt{x + 1} + \sqrt{x - 1}}.$$

$$1616. \int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} dx.$$

$$1618. \int \frac{\sqrt{x^2 - 1} + \operatorname{tg} \sqrt{x - 1}}{\sqrt{x - 1}} dx.$$

$$1620. \int \frac{dx}{x^6 + x^4}.$$

$$1621. \int \left( x + \sqrt{x^2 - 1} \right)^2 dx .$$

$$1622. \int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx .$$

Виділивши повні квадрати у квадратних тричленах, знайти інтеграли:

$$1623. \int \frac{dx}{x^2 + 2x + 5} .$$

$$1624. \int \frac{dx}{x^2 + 2x} .$$

$$1625. \int \frac{dx}{x^2 - 7x + 10} .$$

$$1626. \int \frac{dx}{4x^2 + 4x + 5} .$$

$$1627. \int \frac{dx}{\sqrt{4x - 3 - x^2}} .$$

$$1628. \int \frac{8x - 11}{\sqrt{5 + 2x - x^2}} dx .$$

$$1629. \int \frac{x + 2}{x^2 + 2x + 2} dx .$$

$$1630. \int \frac{2 - 5x}{\sqrt{4x^2 + 9x + 1}} dx .$$

$$1631. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 3}} .$$

$$1632. \int \frac{dx}{\sqrt{9x^2 - 6x + 2}} .$$

$$1633. \int \frac{dx}{\sqrt{12x - 9x^2 - 2}} .$$

$$1634. \int \frac{2 - 4x}{2x^2 - 3x + 1} dx .$$

$$1635. \int \frac{2x + 5}{\sqrt{9x^2 + 6x + 2}} dx .$$

$$1636. \int \frac{xdx}{x^4 - 4x^2 + 3} .$$

$$1637. \int \frac{e^x dx}{\sqrt{e^{2x} + e^x + 1}} .$$

$$1638. \int \frac{\cos x dx}{\sin^2 x - 6 \sin x + 12} .$$

## 5.2. Метод підстановки та інтегрування частинами у невизначеному інтегралі

**Завдання** (для підготовки до практичних занять: 1639—1648; для аудиторних занять: 1655, 1659, 1661, 1674, 1684, 1689, 1695, 1706; домашні: 1650—1652, 1656, 1662, 1665, 1685—1688, 1692, 1705, 1708; додаткові: 1678—1681, 1700, 1709).

*Закінchte вирази:*

**1639.** Для того щоб виконувалася рівність

$$\int f(x) dx = |x = \varphi(t)| = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt ,$$

на функції  $f(x)$  та  $\varphi(t)$  накладаються такі обмеження: ...

**1640.** Формула інтегрування функції частинами має вигляд: ...

**1641.** У формулі інтегрування функції частинами на функції  $u(x)$  та  $v(x)$  накладаються такі обмеження: ...

**1642.** Критерій вибору функцій  $u(x)$  і  $v(x)$  для того, щоб після інтегрування частинами підінтегральна функція спростилася, такий: ...

**1643.** Зазначте правильний вибір функції  $u(x)$  у разі інтегрування частинами за формулою  $\int u dv = uv - \int v du$  інтегралів:

а)  $\int x^3 e^{-2x} dx$ ,  $u(x) = x^3$ ;      б)  $\int x^2 \ln(x+1) dx$ ,  $u(x) = x^2$ ;

в)  $\int \sqrt{x} \operatorname{arctg} 2x dx$ ,  $u(x) = \operatorname{arctg} 2x$ ;

г)  $\int x^2 \sin x dx$ ,  $u(x) = x^2$ .

**1644.** Методом інтегрування частинами інтегруються такі функції:

а)  $f_1(x) = x e^{2x^2}$ ;      б)  $f_2(x) = x^2 \sin 5x$ ;

в)  $f_3(x) = \sqrt{x} \ln(x+1)$ ;      г)  $f_4(x) = \cos^5 x$ ;

д)  $f_5(x) = \sin x \cos^2 x$ .

(Зазначте правильне твердження.)

**1645.** Зазначте метод інтегрування функцій:

а)  $f_1(x) = x^2 \sin \frac{x}{2}$ ;      б)  $f_2(x) = x e^{2x^2}$ ;

в)  $f_3(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x^2 + x + 1}$ ;      г)  $f_4(x) = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$ ;

д)  $f_5(x) = e^x \sin x$ .

**1646.** Знайти  $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ .

*Розв'язання.*

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} &= \left| \begin{array}{l} x = \frac{1}{t}; \\ dx = -\frac{1}{t^2} dt \end{array} \right| = \int \frac{-\frac{1}{t^2} dt}{\frac{1}{t} \sqrt{\frac{1}{t^2}-1}} = -\int \frac{\frac{1}{t^2} dt}{\frac{1}{t} \sqrt{\frac{1-t^2}{t^2}}} = -\int \frac{\frac{1}{t^2} dt}{\frac{1}{t^2} \sqrt{1-t^2}} = \\ &= -\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = -\arcsin t + C = -\arcsin \frac{1}{x} + C. \end{aligned}$$

**1647.** Знайти  $\int x \operatorname{arctg} x dx$ .

*Розв'язання.*

$$\begin{aligned} \int x \operatorname{arctg} x dx &= \left| \begin{array}{l} u = \operatorname{arctg} x; \\ dv = x dx; \\ du = \frac{dx}{1+x^2}; \\ v = \int x dx = \frac{x^2}{2} \end{array} \right| = \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{dx}{1+x^2} = \\ &= \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2 + 1 - 1}{1+x^2} dx = \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int dx + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{1+x^2} = \\ &= \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + C. \end{aligned}$$

**1648.** Знайти  $\int e^x \cos x dx$ .

*Розв'язання.*

$$\begin{aligned} \int e^x \cos x dx &= \left| \begin{array}{l} u = e^x; \quad du = e^x dx; \\ dv = \cos x dx; \quad v = \int \cos x dx = \sin x \end{array} \right| = \\ &= e^x \sin x - \int e^x \sin x dx = \left| \begin{array}{l} u = e^x; \quad du = e^x dx; \\ dv = \sin x dx; \quad v = -\cos x \end{array} \right| = \\ &= e^x \sin x - \left( -e^x \cos x - \int (-\cos x) e^x dx \right) = \\ &= e^x \sin x + e^x \cos x + \underbrace{\int e^x \cos x dx}_I. \end{aligned}$$

Отже, маємо:

$$I = e^x \sin x + e^x \cos x - I \quad \text{або} \quad 2I = e^x \sin x + e^x \cos x;$$

$$I = \int e^x \cos x dx = \frac{e^x (\sin x + \cos x)}{2} + C.$$

Інтегруванням частинами знайти інтеграли:

**1649.**  $\int x \sin x dx$ .

**1650.**  $\int x \cos 2x dx$ .

**1651.**  $\int x e^{-x} dx$ .

**1652.**  $\int x 5^x dx$ .

**1653.**  $\int \arcsin x dx$ .

**1654.**  $\int \arctg x dx$ .

**1655.**  $\int \frac{x dx}{\sin^2 x}$ .

**1656.**  $\int x^2 e^{3x} dx$ .

$$1657. \int x \cos^2 x dx.$$

$$1659. \int x^2 \ln(1+x) dx.$$

$$1661. \int \sin(\ln x) dx.$$

$$1663. \int \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} dx.$$

$$1665. \int \frac{x}{e^x} dx.$$

$$1667. \int \operatorname{arctg} \sqrt{x} dx.$$

$$1669. \int (2x-3) \sin \frac{x}{2} dx.$$

$$1671. \int \frac{xdx}{\cos^2 x}.$$

$$1673. \int \ln^2 x dx.$$

$$1675. \int \sqrt{a^2 - x^2} dx.$$

$$1677. \int \frac{x^2 e^x}{(x+2)^2} dx.$$

$$1679. \int \frac{x^2 dx}{(1+x^2)^2}.$$

$$1681. \int \frac{\operatorname{arctg} e^x}{e^x} dx.$$

$$1658. \int \ln(x^2 + 1) dx.$$

$$1660. \int e^{ax} \sin bxdx.$$

$$1662. \int (x^2 - 2x + 3) \ln x dx.$$

$$1664. \int \frac{\sin^2 x}{e^x} dx.$$

$$1666. \int x \arcsin x dx.$$

$$1668. \int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx.$$

$$1670. \int x e^{-2x} dx.$$

$$1672. \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1+x^2}}.$$

$$1674. \int \sqrt{a^2 + x^2} dx.$$

$$1676. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$1678. \int \frac{\ln(\sin x)}{\sin^2 x} dx.$$

$$1680. \int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^2}.$$

Методом підстановки знайти інтеграли:

$$1682. \int \frac{dx}{1 + \sqrt{x+1}}.$$

$$1683. \int \frac{dx}{1 + \sqrt[3]{x+1}}.$$

$$1684. \int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx.$$

$$1685. \int \frac{dx}{e^x + 1}.$$

$$1686. \int \frac{e^{2x} dx}{\sqrt[4]{e^x + 1}}.$$

$$1688. \int \frac{e^{2x} dx}{\sqrt{e^x + 1}}.$$

$$1690. \int \frac{\sqrt{x} dx}{x(x+1)}.$$

$$1692. \int \frac{\sqrt{1 + \ln x}}{x \ln x} dx.$$

$$1694. \int x(2x+5)^{10} dx.$$

$$1696. \int \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

$$1698. \int x^5(2-5x^3)^{\frac{2}{3}} dx.$$

$$1700. \int \frac{(x+1)dx}{x(1+xe^x)}.$$

$$1687. \int \frac{\ln x dx}{x(1-\ln^2 x)}.$$

$$1689. \int \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}.$$

$$1691. \int \frac{dx}{\sqrt{ax+b+m}}.$$

$$1693. \int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}.$$

$$1695. \int \frac{\sin^3 x dx}{\sqrt{\cos x}}.$$

$$1697. \int \frac{dx}{e^x + e^{2x}}.$$

$$1699. \int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}.$$

Використовуючи комбінацію методів підстановки, розкладання та інтегрування частинами, знайти такі інтеграли:

$$1701. \int e^{\sqrt{x}} dx.$$

$$1702. \int \sin \sqrt[3]{x} dx.$$

$$1703. \int \frac{\arcsin x}{\sqrt{(1-x^2)^3}} dx.$$

$$1704. \int \frac{x^2 \operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx.$$

$$1705. \int \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2(1+x^2)} dx.$$

$$1706. \int \frac{x^7 dx}{(1+x^4)^2}.$$

$$1707. \int e^{2x^2 + \ln x} dx.$$

$$1708. \int \frac{\ln \ln x}{x} dx.$$

$$1709. \int e^{-x^2} x^5 dx.$$

$$1710. \int \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt[4]{x^3 + 1}}.$$

### 5.3. Інтегрування раціональних, тригонометричних та ірраціональних функцій

**Завдання** (для підготовки до практичних занять: 1711—1722, 1763, 1804, 1830, 1849; для аудиторних занять: 1725, 1737, 1758, 1761, 1764, 1781, 1798, 1806, 1814, 1822, 1831, 1850; домашні: 1726, 1730, 1734, 1746, 1765—1769, 1778, 1783—1785, 1799, 1807—1809, 1815—1817, 1824, 1839—1842, 1854, 1855; додаткові: 1732, 1740, 1748, 1756, 1762, 1785—1787, 1803, 1819—1821, 1826, 1845—1848, 1856—1860).

*Закінchte вирази:*

**1711.** Раціональним дробом називається ...

**1712.** Раціональний дріб називається правильним (неправильним), якщо ...

**1713.** Найпростіші раціональні дроби бувають таких типів: ...

**1714.** Із даних функцій виберіть ті, які належать до найпростіших раціональних дробів:

а)  $f_1(x) = \frac{3}{1-x}$ ;

б)  $f_2(x) = \frac{2x-1}{(x-1)^3}$ ;

в)  $f_3(x) = \frac{5x}{x^2+5}$ ;

г)  $f_4(x) = \frac{1}{(2x-3)^2}$ ;

д)  $f_5(x) = \frac{x+1}{x^4+2x^2+1}$ ;

е)  $f_6(x) = \frac{(x-1)^3}{x^2+1}$ .

**1715.** Інтегрування раціональних функцій у загальному випадку:

- а) неможливе;
- б) завжди можливе;
- в) можливе за деяких обмежень.

(Зазначте правильну відповідь.)

**1716.** На найпростіші раціональні дроби розкладається:

- а) будь-яка інтегровна функція;
- б) лише неправильний раціональний дріб;
- в) лише диференційовна функція;
- г) лише правильний раціональний дріб.

(Зазначте правильне твердження.)

**1717.** Знайти помилку, якщо вона є, у розкладі:

$$\frac{1}{x^2(x-1)(x^2-x+1)} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{B_1}{(x-1)} + \frac{B_2}{(x-1)^2} + \frac{C_1}{x^2-x+1}.$$

**1718.** Методика інтегрування раціональних дробів така: ...

**1719.** Функція  $R(\sin x, \cos x)$  називається раціональною відносно  $\sin x, \cos x$ , якщо ...

**1720.** Зазначте правильні підстановки для інтегрування функції  $R\left(x, \sqrt{\frac{x}{x-1}}\right)$ :

а)  $\frac{x}{x-1} = t$ ;

б)  $\left(\frac{x}{x-1}\right)^2 = t$ ;

в)  $x^2 = t$ ;

г)  $\sqrt{\frac{x}{x-1}} = t$ ;

д)  $\frac{x}{x-1} = z^2$ .

**1721.** Які з підстановок:

а)  $\sin x = t$ ;

б)  $\cos x = t$ ;

в)  $\operatorname{tg} x = t$ ;

г)  $\operatorname{ctg} x = t$ ;

д)  $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$

можна застосовувати для інтегрування функцій:

$$f_1(x) = \frac{\sin x + \cos x}{1 + \sin x};$$

$$f_2(x) = \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x};$$

$$f_3(x) = \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x};$$

$$f_4(x) = \frac{\sin^2 x}{1 + \cos^2 x};$$

$$f_5(x) = \frac{\sin^5 x}{\cos^5 x}?$$

**1722.** Яку з підстановок можна використати для інтегрування функції  $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ :

а)  $\sqrt{x^2 - 1} = t$ ;

б)  $x = \sin t$ ;

в)  $x = \frac{1}{\sin t}$ ;

г)  $x = \operatorname{tg} t$ ;

д)  $x = \cos t$ ;

е)  $x = \frac{1}{\cos t}$ ?

Знайти інтеграли від раціональних функцій:

$$1723. \int \frac{2x^2 + 41x - 91}{(x-1)(x+3)(x-4)} dx.$$

$$1724. \int \frac{dx}{6x^3 - 7x^2 - 3x}.$$

$$1725. \int \frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x} dx.$$

$$1726. \int \frac{x^3 - 1}{4x^3 - x} dx.$$

$$1727. \int \frac{xdx}{x^4 - 3x^2 + 2}.$$

$$1728. \int \frac{x^4 dx}{(x+2)(x^2-1)}.$$

$$1729. \int \frac{dx}{(x-1)(x+2)(x+3)}.$$

$$1730. \int \frac{2x^2 - 5}{x^4 - 5x^2 + 6} dx.$$

$$1731. \int \frac{5x^3 + 2}{x^3 - 5x^2 + 4x} dx.$$

$$1732. \int \frac{x^3 - 3x + 2}{x(x^2 + 2x + 1)} dx.$$

$$1733. \int \left( \frac{x+2}{x-1} \right)^2 \frac{dx}{x}.$$

$$1734. \int \frac{x^3 + 1}{x(x-1)^3} dx.$$

$$1735. \int \frac{x^2 dx}{(x+2)^2(x+1)}.$$

$$1736. \int \frac{(x^2 + 1)dx}{(x-1)^3}.$$

$$1737. \int \frac{x^2 dx}{(x+2)^2(x+4)^2}.$$

$$1738. \int \frac{dx}{x(x^2 + 1)}.$$

$$1739. \int \frac{dx}{1+x^3}.$$

$$1740. \int \frac{xdx}{x^3 - 1}.$$

$$1741. \int \frac{x^2 dx}{1-x^4}.$$

$$1742. \int \frac{dx}{(x+1)^2(x^2+1)}.$$

$$1743. \int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+x)}.$$

$$1744. \int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)}.$$

$$1745. \int \frac{(x^3 + 4x^2 - 2x + 1) dx}{x^4 + x}.$$

$$1746. \int \frac{(7x-15)dx}{x^3 - 2x^2 + 5x}.$$

$$1747. \int \frac{x^3 + x - 1}{(x^2 + 2)^2} dx.$$

$$1748. \int \frac{dx}{(1+x^2)^4}.$$

$$1749. \int \frac{2x-3}{x^2 - 7x + 12} dx.$$

$$1750. \int \frac{3x^2 + 2x - 3}{x^3 - x} dx.$$

$$1751. \int \frac{(x+1)^3 dx}{x^2 - x}.$$

$$1753. \int \frac{2x^2 - 5x + 1}{x^3 - 2x^2 + x} dx.$$

$$1755. \int \frac{dx}{x^4 - x^2}.$$

$$1757. \int \frac{x^4 + 1}{x^3 - x^2 + x - 1} dx.$$

$$1759. \int \frac{dx}{x^3 + 8}.$$

$$1761. \int \frac{5x^2 - 12}{(x^2 - 6x + 13)^2} dx.$$

$$1752. \int \frac{x + 2}{x^3 - 2x^2} dx.$$

$$1754. \int \frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 5}{(x - 2)^4} dx.$$

$$1756. \int \frac{2x^2 - 3x - 3}{(x - 1)(x^2 - 2x + 5)} dx.$$

$$1758. \int \frac{2x^2 + x + 4}{x^3 + x^2 + 4x + 4} dx.$$

$$1760. \int \frac{3x^2 + 2x + 1}{(x + 1)^2 (x^2 + 1)} dx.$$

$$1762. \int \frac{dx}{(x^2 + 9)^3}.$$

Знайти інтеграли від тригонометричних функцій:

$$1763. \int \sin^2 x \cos^3 x dx.$$

$$1764. \int \sin^3 x \cos^3 x dx.$$

$$1765. \int (1 - \sin 2x)^2 dx.$$

$$1766. \int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} dx.$$

$$1767. \int \cos^7 x dx.$$

$$1768. \int \cos^4 x dx.$$

$$1769. \int \frac{\sin^5 x}{\cos^4 x} dx.$$

$$1770. \int (1 + 2 \cos x)^2 dx.$$

$$1771. \int \cos^2 5x dx.$$

$$1772. \int \sin^2 x \cos^2 x dx.$$

$$1773. \int \sin^4 x dx.$$

$$1774. \int \sin^5 x dx.$$

$$1775. \int \sin^3 x \cos^5 x dx.$$

$$1776. \int \cos^4 x \sin^3 x dx.$$

$$1777. \int \operatorname{ctg}^4 y dy.$$

$$1778. \int \sin 5x \sin 6x dx.$$

$$1779. \int \sin at \cos btdt.$$

$$1780. \int \frac{dx}{\sin x}.$$

$$1781. \int \frac{dx}{3 + 5 \cos x}.$$

$$1782. \int \frac{dx}{\cos x + 2 \sin x + 3}.$$

$$1783. \int \frac{dx}{8 - 4 \sin x + 7 \cos x}.$$

$$1784. \int \frac{dx}{\sin^3 x}.$$

$$1785. \int \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x}}{\sin x \cos x} dx.$$

$$1787. \int \frac{dx}{\sqrt[4]{\sin^3 x \cos^5 x}}.$$

$$1789. \int \cos^5 x dx.$$

$$1791. \int \cos \frac{11}{3} x \cos 3x dx.$$

$$1793. \int \frac{\cos^5 x}{\sin^3 x} dx.$$

$$1795. \int \operatorname{ctg}^3 x dx.$$

$$1797. \int \frac{dx}{\cos x}.$$

$$1799. \int \frac{dx}{\sin^2 x + \operatorname{tg}^2 x}.$$

$$1801. \int \frac{\cos x dx}{1 + \cos x}.$$

$$1803. \int \frac{dx}{\cos^3 x}.$$

$$1786. \int \frac{\cos 2x - 3}{\cos^4 x \sqrt{4 - \operatorname{ctg}^2 x}} dx.$$

$$1788. \int (1 + 3 \cos 2x)^2 dx.$$

$$1790. \int \sin^2 3x dx.$$

$$1792. \int \sin^2 x \cos^4 x dx.$$

$$1794. \int \operatorname{tg}^2 5x dx.$$

$$1796. \int (1 + 2 \cos x)^3 dx.$$

$$1798. \int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^4 x}.$$

$$1800. \int \frac{dx}{\sin x + \cos x}.$$

$$1802. \int \frac{dx}{5 + \sin x + 3 \cos x}.$$

Позбавляючись від ірраціональності підстановкою типу  $\frac{ax+b}{cx+d} = t^s$ , знайти такі інтеграли:

$$1804. \int \frac{x+1}{x\sqrt{x-2}} dx.$$

$$1806. \int \frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}} dx.$$

$$1808. \int \frac{x-1}{\sqrt{2x-1}} dx.$$

$$1810. \int \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}.$$

$$1812. \int \frac{dx}{x(\sqrt{x} + \sqrt[5]{x^2})}.$$

$$1805. \int \frac{\sqrt{x}}{x+2} dx.$$

$$1807. \int \frac{xdx}{\sqrt{2x+1}+1}.$$

$$1809. \int \frac{dx}{\sqrt[3]{3x+1}-1}.$$

$$1811. \int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx.$$

$$1813. \int \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}.$$

$$1814. \int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}}.$$

$$1816. \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}}.$$

$$1818. \int \frac{x^2 + \sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}} dx.$$

$$1820. \int \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt[3]{x} + 1} dx.$$

$$1815. \int \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[4]{x}}.$$

$$1817. \int \frac{xdx}{\sqrt{x+1} + \sqrt[3]{x+1}}.$$

$$1819. \int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + 2\sqrt[4]{x}}.$$

$$1821. \int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} dx.$$

За допомогою підстановок Ейлера знайти такі інтеграли:

$$1822. \int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 + x + 1}}.$$

$$1824. \int x\sqrt{x^2 - 2x + 2} dx.$$

$$1826. \int \frac{dx}{1 + \sqrt{x^2 + 2x + 2}}.$$

$$1828. \int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2 + x + 1}}.$$

$$1823. \int \frac{dx}{1 + \sqrt{1 - 2x - x^2}}.$$

$$1825. \int \frac{dx}{(2x-3)\sqrt{4x-x^2}}.$$

$$1827. \int \frac{dx}{x\sqrt{2+x-x^2}}.$$

$$1829. \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + x + 1}}.$$

За допомогою тригонометричних підстановок знайти такі інтеграли:

$$1830. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$1832. \int \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x} dx.$$

$$1834. \int x^2 \sqrt{4 - x^2} dx.$$

$$1836. \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 + a^2}}.$$

$$1831. \int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^4} dx.$$

$$1833. \int \sqrt{1-x^2} dx.$$

$$1835. \int \frac{dx}{\sqrt{(a^2 + x^2)^3}}.$$

$$1837. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

$$1838. \int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} dx.$$

$$1840. \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2-9}}.$$

$$1842. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{4-x^2}}.$$

$$1844. \int \frac{dx}{\sqrt{(4+x^2)^3}}.$$

$$1846. \int \frac{x^2 dx}{(2-x^2)^3}.$$

$$1848. \int \frac{dx}{x \sqrt{x^2-a^2}}.$$

$$1839. \int \frac{\sqrt{(9-x^2)^3}}{x^6} dx.$$

$$1841. \int \frac{dx}{\sqrt{(x^2-a^2)^3}}.$$

$$1843. \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{1+x^2}}.$$

$$1845. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(a^2+x^2)^5}}.$$

$$1847. \int \frac{dx}{\sqrt{(x^2-10)^3}}.$$

Знайти інтеграли від диференціальних біномів:

$$1849. \int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} dx.$$

$$1851. \int \frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt[3]{x})^2} dx.$$

$$1853. \int \frac{x^5 dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$1855. \int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}.$$

$$1857. \int \frac{dx}{x^2 \sqrt[5]{1+\frac{1}{x}}}.$$

$$1859. \int \frac{dx}{x^4 \sqrt{1+x^2}}.$$

$$1850. \int x^5 \sqrt[3]{(1+x^3)^2} dx.$$

$$1852. \int \frac{xdx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}.$$

$$1854. \int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^2}}.$$

$$1856. \int \frac{dx}{x^6 \sqrt{1+x^6}}.$$

$$1858. \int x^2 (1+2x^2)^{\frac{3}{2}} dx.$$

$$1860. \int \frac{dx}{x^2 \sqrt[3]{(2+x^3)^5}}.$$

#### 5.4. Визначений інтеграл. Невластиві інтеграли

**Завдання** (для підготовки до практичних занять: 1861—1885, 1903, 1941 а), 1942 а), 1943 а), 1946, 1970; для аудиторних занять: 1894, 1898, 1901, 1907, 1941 д), 1942 г), 1943 д), 1945 б), 1957, 1969, 1975, 1977; домашні: 1887—1890, 1899, 1906—1910, 1939, 1941 б), в), 1942 б), 1943 в), г), 1944 б), 1949—1952, 1967, 1971, 1979; додаткові: 1892, 1897, 1924, 1932, 1943 б), 1945 а), 1955, 1978, 1980, 1981).

*Закінchte вирази:*

**1861.** Криволінійною трапецією називається ...

**1862.** Із фігур, що обмежені лініями:

а)  $y = x^2$ ;  $y = \sqrt{x}$ ;

б)  $y = 1 - x^2$ ;  $y = 0$ ;

в)  $y = \ln x$ ;  $y = 0$ ;  $x = e$ ;

г)  $y = x^4$ ;  $y = 0$ ;  $x = 1$ ;  $x = 2$ ;

д)  $y = x + 1$ ;  $y = x^2 + 1$ ,

виберіть ті, які не відповідають поняттю «криволінійна трапеція».

**1863.** Визначеним інтегралом називається ...

**1864.** Геометричний зміст визначеного інтеграла полягає в тому, що ...

**1865.** Виберіть правильні твердження. Величина визначеного інтеграла залежить від: а) виду підінтегральної функції; б) позначення аргументу; в) проміжку інтегрування; г) області визначення первісної функції.

**1866.** Теорема про середнє для визначеного інтеграла формулюється так ...

**1867.** Сформулюйте п'ять будь-яких властивостей визначеного інтеграла.

**1868.** Які з формул:

а)  $\int_a^b \sum_{i=1}^n f_i(x) dx = \sum_{i=1}^n \int_a^b f_i(x) dx$ ;

б)  $\int_a^b f(x) dx = - \int_a^b \frac{dx}{f(x)}$ ;

в)  $\int_a^b f(x) dx \geq 0$  при  $\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ a > b \end{cases}$ ;

г)  $\int_a^b 0 \cdot f(x) dx = 0 \cdot \int_a^b f(x) dx$ ;

д)  $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$

відбивають властивості визначеного інтеграла?

**1869.** Теорема про похідну від визначеного інтеграла зі змінною верхньою межею інтегрування формулюється так: ...

**1870.** Виберіть правильну відповідь з таких тверджень: визначений інтеграл зі змінною верхньою межею інтегрування  $\int_a^x f(t)dt$  — це: а) дійсне число; б) функція аргументу  $x$ ; в) функція аргументу  $t$ ; г) похідна функції  $f(x)$ ; д) первісна функції  $f(x)$ .

**1871.** Формула Ньютона—Лейбніца має вигляд:

$$\text{а) } \int_a^b f(x)dx = F(a) - F(b); \quad \text{б) } \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a);$$

$$\text{в) } \int_a^b f(x)dx = F(x) + C; \quad \text{г) } \int_a^b f(x)dx = F(a) - F(b);$$

$$\text{д) } \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) + C.$$

(Зазначте неправильні формули.)

**1872.** Формула, що зв'язує визначений та невизначений інтеграл, така: ...

**1873.** Особливості у використанні методів підстановки та інтегрування частинами для визначеного інтеграла стосовно їх використання для невизначеного інтеграла полягають у тому, що ...

**1874.** Формула трапецій для наближеного обчислення визначеного інтеграла така: ...

**1875.** Якщо  $f(x) \geq 0$  і монотонно спадає, то який із результатів наближеного обчислення  $\int_a^b f(x)dx$  буде найменшим у разі використання формул: а) лівих прямокутників; б) правих прямокутників; в) трапецій?

**1876.** Невластивим інтегралом від функції  $f(x)$  на нескінченному проміжку  $(a; +\infty)$  називається ...

**1877.** Невластивий інтеграл на нескінченному проміжку називається збіжним, якщо ...

**1878.** Невластивим інтегралом від функції  $f(x)$ , розривної в точці  $x = a$ , на проміжку  $(a; b]$  називається ...

**1879.** Невластивий інтеграл від розривної функції називається збіжним, якщо ...

**1880.** Зазначте невластиві із інтегралів:

$$\begin{array}{lll} \text{а)} \int_{-\infty}^0 e^{-x^2} dx; & \text{б)} \int_{-1}^1 \frac{dx}{x}; & \text{в)} \int_{-1}^1 x^n dx, \quad n \in \mathbb{N}; \\ \text{г)} \int_{-\infty}^{+\infty} \ln|x| dx; & \text{д)} \int_0^x \operatorname{tg} x dx; & \text{е)} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4x^2 + 1}}. \end{array}$$

**1881.** Ознаки порівняння для невластивих інтегралів формулюються так: ...

**1882.** Користуючись умовами збіжності (розбіжності) інтеграла Діріхле  $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ , ( $a > 0$ ), встановіть збіжність (розбіжність) таких інтегралів:

$$\begin{array}{lll} \text{а)} \int_0^{+\infty} (2x^2 + 1) dx; & \text{б)} \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}; & \text{в)} \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt[3]{x}}; \\ \text{г)} \int_1^{+\infty} \frac{x dx}{\sqrt[5]{x^{11}}}; & \text{д)} \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}. \end{array}$$

**1883.** Інтеграл Ейлера—Пуассона має вигляд: ...

**1884.** Гамма-функція  $\Gamma(a)$  має вигляд: ...

**1885.** Похідна  $I'(t) = \frac{d}{dt} \left( \int_{a(t)}^{b(t)} f(x; t) dx \right)$  обчислюється за формулою: ...

Використовуючи метод підстановки, обчислити такі визначені інтеграли:

$$\text{1886.} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^4 x \cos x dx.$$

$$\text{1887.} \int_0^1 (1 + e^{3x})^2 e^{3x} dx.$$

$$\text{1888.} \int_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1 + \ln x}}.$$

$$\text{1889.} \int_1^{\sqrt{3}} \frac{x dx}{\sqrt{4 - x^2}}.$$

$$\text{1890.} \int_0^1 \frac{dx}{e^x + e^{-x}}.$$

$$\text{1891.} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx.$$

$$\text{1892.} \int_0^3 \frac{dx}{1 + \sqrt{x+1}}.$$

$$\text{1893.} \int_2^5 \frac{x^2 dx}{\sqrt{x-1}}.$$

$$1894. \int_4^9 \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt{x}-1}.$$

$$1896. \int_5^8 \frac{\sqrt{x-4}}{x} dx.$$

$$1898. \int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{4-x^2}}.$$

$$1900. \int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2} dx.$$

$$1902. \int_0^1 \sqrt{2x+x^2} dx.$$

$$1895. \int_1^5 \frac{x dx}{\sqrt{4x+5}}.$$

$$1897. \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^3 x dx.$$

$$1899. \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{(4+x^2)^3}}.$$

$$1901. \int_1^3 \frac{dx}{x\sqrt{x^2+5x+1}}.$$

Інтегруванням частинами обчислити такі визначені інтеграли:

$$1903. \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin 2x dx.$$

$$1905. \int_1^e x^2 \ln x dx.$$

$$1907. \int_0^1 \operatorname{arctg} x dx.$$

$$1909. \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x dx}{\cos^2 x}.$$

$$1911. \int_0^{\pi} e^x \sin x dx.$$

$$1904. \int_1^{e-1} \ln(x+1) dx.$$

$$1906. \int_0^1 x^3 e^{2x} dx.$$

$$1908. \int_1^2 (2-x)e^{\frac{x}{2}} dx.$$

$$1910. \int_0^1 \operatorname{arctg} \sqrt{x} dx.$$

$$1912. \int_0^{0.5} \frac{x \arcsin x}{(1-x^2)^2} dx.$$

Застосовуючи різні методи інтегрування, обчислити такі визначені інтеграли:

$$1913. \int_1^e \frac{2 \ln x + 1}{x} dx.$$

$$1914. \int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}} dx}{\sqrt{x}}.$$

$$1915. \int_0^a x \sqrt{a^2 - x^2} dx.$$

$$1916. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^2 x dx.$$

$$1917. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx.$$

$$1919. \int_0^4 \frac{dx}{1 + \sqrt{2x+1}}.$$

$$1921. \int_4^9 \frac{dx}{\sqrt{x}-1}.$$

$$1923. \int_0^4 \frac{dx}{1 + \sqrt{x}}.$$

$$1925. \int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}.$$

$$1927. \int_0^{2\pi} x \sin 2x dx.$$

$$1929. \int_0^1 \ln(x+1) dx.$$

$$1931. \int_0^{\frac{\pi}{3}} x \cos 3x dx.$$

$$1933. \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{xdx}{\sin^2 x}.$$

$$1935. \int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} dx.$$

$$1937. \int_{\sqrt{\frac{8}{3}}}^{2\sqrt{2}} \frac{dx}{x\sqrt{(x^2-2)^5}}.$$

$$1939. \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{(x+1)^3}}.$$

$$1918. \int_0^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{tg} x dx.$$

$$1920. \int_3^8 \frac{xdx}{\sqrt{1+x}}.$$

$$1922. \int_0^1 \frac{xdx}{1 + \sqrt{x}}.$$

$$1924. \int_0^5 \sqrt{25-x^2} dx.$$

$$1926. \int_1^e \ln x dx.$$

$$1928. \int_0^1 x e^{3x} dx.$$

$$1930. \int_0^1 (x-1)e^{-x} dx.$$

$$1932. \int_1^e x \ln x dx.$$

$$1934. \int_{-1}^1 x \operatorname{arctg} x dx.$$

$$1936. \int_0^1 x^2 \sqrt{1-x^2} dx.$$

$$1938. \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{dx}{(2x^2+1)\sqrt{x^2+1}}.$$

$$1940. \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x \sin x}{\cos^3 x} dx.$$

**1941.** Визначте знак інтеграла, не обчислюючи його:

- а)  $\int_0^{2\pi} x \sin x \, dx$ ;      б)  $\int_{-1}^2 x^3 \, dx$ ;      в)  $\int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{x} \, dx$ ;  
 г)  $\int_{\frac{1}{2}}^1 x^2 \ln x \, dx$ ;      д)  $\int_{-2}^2 x^3 2^x \, dx$ .

**1942.** Вкажіть правильні із таких нерівностей:

- а)  $\int_0^1 \sqrt{1+x^2} \, dx > \int_0^1 x \, dx$ ;      б)  $\int_0^1 x^2 \sin^2 x \, dx > \int_0^1 x \sin^2 x \, dx$ ;  
 в)  $\int_1^2 e^{x^2} \, dx > \int_1^2 e^x \, dx$ ;      г)  $\int_0^1 e^{-x} \, dx > \int_0^1 e^{-x^2} \, dx$ .

**1943.** Знайти середнє значення даних функцій у зазначених проміжках:

- а)  $f(x) = x^2$ ,  $x \in [0; 1]$ ;      б)  $f(x) = \sqrt{x}$ ,  $x \in [0; 100]$ ;  
 в)  $f(x) = \sin^2 x$ ,  $x \in [0; \pi]$ ;      г)  $f(x) = \sin^4 x$ ,  $x \in [0; \pi]$ ;  
 д)  $f(x) = 10 + 2 \sin x + 3 \cos x$ ,  $x \in [0; 2\pi]$ .

**1944.** Користуючись формулами лівих, правих прямокутників та трапецій (при  $n = 10$ ), обчислити наближено:

- а)  $\ln 2 = \int_1^2 \frac{dx}{x}$ ;      б)  $\pi = 4 \int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 1}$ .

**1945.** За формулами трапецій наближено обчислити такі інтеграли:

- а)  $\int_0^1 \sqrt{1-x^3} \, dx$  ( $n = 6$ );      б)  $\int_0^1 \frac{dx}{x+1}$  ( $n = 8$ );  
 в)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{1}{4} \sin^2 x} \, dx$  ( $n = 6$ ).

Обчислити невластиві інтеграли або встановити їх розбіжність:

**1946.**  $\int_a^{\infty} \frac{dx}{x \ln x}$ , якщо  $a > 1$ .

**1947.**  $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x}$ , якщо  $a > 1$ .

**1948.**  $\int_0^{+\infty} e^{-kx} \, dx$ , якщо  $k > 0$ .

**1949.**  $\int_0^{+\infty} \frac{\arctg x}{1+x^2} \, dx$ .

$$1950. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 6x + 13}.$$

$$1952. \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + x}.$$

$$1954. \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x \ln x}.$$

$$1956. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{ctg} x dx.$$

$$1958. \int_0^{+\infty} e^{-x} dx.$$

$$1960. \int_e^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x}.$$

$$1962. \int_0^{+\infty} x \sin x dx.$$

$$1964. \int_0^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x}{2}} dx.$$

$$1966. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$1968. \int_{-1}^2 \frac{dx}{x}.$$

$$1951. \int_0^{+\infty} x e^{-\frac{x}{2}} dx.$$

$$1953. \int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^2}.$$

$$1955. \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x \ln^2 x}.$$

$$1957. \int_2^6 \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}}.$$

$$1959. \int_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}.$$

$$1961. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 9}.$$

$$1963. \int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx.$$

$$1965. \int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2}.$$

$$1967. \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}.$$

$$1969. \int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x dx}{x^2}.$$

Дослідити збіжність інтегралів:

$$1970. \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}.$$

$$1972. \int_1^{+\infty} \frac{e^{-x} dx}{x}.$$

$$1974. \int_2^{+\infty} \frac{x dx}{\sqrt{x^4 + 1}}.$$

$$1971. \int_2^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^3 - 1}}.$$

$$1973. \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx.$$

$$1975. \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx.$$

$$1976. \int_1^{+\infty} \frac{dx}{2x + \sqrt[3]{x^2 + 1} + 5}.$$

$$1977. \int_1^2 \frac{dx}{\ln n}.$$

$$1978. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^4}}.$$

$$1979. \int_0^1 \frac{dx}{\operatorname{tg} x - x}.$$

1980. Знайти значення функції  $\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} dx$  при:

1)  $a = 0,5$ ;

2)  $a = 1$ ;

3)  $a = 2$ .

1981. Знайти похідні  $\left(\frac{dI}{dt}\right)$  таких функцій:

а)  $I(t) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(tx)}{x} dx$ ;

б)  $I(t) = \int_0^t \frac{\ln(1+tx)}{x} dx$ ;

в)  $I(t) = \int_1^2 \frac{e^{tx}}{x} dx$ ;

г)  $I(t) = \int_0^1 \ln(x^2 + t^2) dx \quad (1 \leq t \leq 2).$

## 5.5. Кратні інтеграли

**Завдання** (для підготовки до практичних занять: 1982—1990, 2001, 2007, 2015, 2047 а); для аудиторних занять: 1992, 2002, 2008, 2016, 2021, 2040, 2049; домашні: 1993—1999, 2003, 2009—2011, 2017, 2018, 2022—2027, 2041, 2050; додаткові: 2000, 2004—2006, 2012—2014, 2019, 2032—2039, 2042—2047, 2051—2052).

*Закінchte вирази:*

**1982.** Циліндроїдом (циліндричним тілом), твірна якого паралельна осі  $Oz$ , називається фігура, що обмежена поверхнями, рівняння яких мають вигляд: ...

**1983.** Встановити, які із даних фігур є циліндроїдами, якщо вони обмежені такими поверхнями:

а)  $z = y^2$ ;

$x^2 + y^2 = 4$ ;

$z = 0$ ;

б)  $y = \sqrt{x}$ ;

$y = 2\sqrt{x}$ ;

$x + z = 10$ ;  $z = 0$ ;

в)  $x = y^2 + z^2$ ;

$y = z^2$ ;

$y = 1$ ;  $x = 0$ .

г)  $x + y + z = 1$ ;

$x^2 + y^2 = 1$ ;

$z = y^2$ .

**1984.** Подвійним інтегралом від функції  $z = f(x; y)$  за областю  $D$  називається ...

**1985.** Потрійним інтегралом від функції  $u = f(x; y; z)$  за областю  $V$  називається ...

**1986.** Без додаткових перетворень поміняти місцями порядок інтегрування у повторному інтегралі можна, якщо областю інтегрування буде ...

**1987.** Щоб поміняти порядок інтегрування у повторному інтегралі у разі довільної області інтегрування, треба ...

**1988.** Область  $D \subset R^2$  називається правильною по відношенню до осі  $Oy$ , якщо ...

**1989.** Зазначте, які із даних областей, що обмежені лініями:

а)  $xy = 4; y = x; x = 4;$  б)  $x^2 - y^2 = 1; y = \pm x; x = 2;$

в)  $y^2 = x; y = \pm x;$  г)  $y = \ln x; x - y = 1; y = -1;$

д)  $|x| + |y| = 1; x^2 + y^2 = 1;$  е)  $y = x^2; x^2 + y^2 = 1; y = 0,$

будуть правильними по відношенню до координатних осей  $Ox, Oy$ .

**1990.** При переході до полярних координат подвійний інтеграл  $\iint_D f(x; y) dx dy$  можна подати у вигляді: ...

Обчислити такі повторні інтеграли:

**1991.**  $\int_0^2 dy \int_0^1 (x^2 + 2y) dx.$

**1992.**  $\int_3^4 dx \int_1^2 \frac{dy}{(x+y)^2}.$

**1993.**  $\int_0^1 dx \int_0^1 \frac{x^2 dy}{1+y^2}.$

**1994.**  $\int_1^2 dx \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{x^2 dy}{y^2}.$

**1995.**  $\int_{-3}^3 dy \int_{y^2-4}^5 (x+2y) dx.$

**1996.**  $\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{a \sin \varphi}^a r dr.$

**1997.**  $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2-y^2} dy.$

**1998.**  $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{3 \cos \varphi} r^2 \sin^2 \varphi dr.$

**1999.**  $\int_0^1 dx \int_0^2 y dy \int_0^3 z^2 dz.$

**2000.**  $\int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^{xy} x^3 y^2 z dz.$

Знайти рівняння ліній, що обмежують область інтегрування таких інтегралів:

$$2001. \int_{-6}^2 dy \int_{\frac{y^2}{4}-1}^{2-y} f(x; y) dx.$$

$$2002. \int_1^3 dx \int_{x^2}^{x+9} f(x; y) dy.$$

$$2003. \int_0^4 dy \int_y^{10-y} f(x; y) dx.$$

$$2004. \int_1^3 dx \int_{\frac{x}{3}}^{2x} f(x; y) dy.$$

$$2005. \int_0^3 dx \int_0^{\sqrt{25-x^2}} f(x; y) dy.$$

$$2006. \int_{-1}^2 dx \int_{x^2}^{x+2} f(x; y) dy.$$

Змінити порядок інтегрування в таких інтегралах:

$$2007. \int_0^2 dx \int_x^{2x} f(x; y) dy.$$

$$2008. \int_{-6}^2 dx \int_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x} f(x; y) dy.$$

$$2009. \int_0^1 dx \int_{x^3}^{x^2} f(x; y) dy.$$

$$2010. \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x; y) dy.$$

$$2011. \int_1^2 dx \int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x; y) dy.$$

$$2012. \int_0^2 dx \int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x}} f(x; y) dy.$$

$$2013. \int_1^e dx \int_0^{\ln x} f(x; y) dy.$$

$$2014. \int_0^{2\pi} dx \int_0^{\sin x} f(x; y) dy.$$

Обчислити подвійні інтеграли зведенням їх до повторних у разі прямокутної області  $D = \{(x; y) \in R^2 \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ .

$$2015. \iint_D (x+y) dx dy; \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 1 \leq y \leq 2.$$

$$2016. \iint_D xy(x-y) dx dy; \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 2.$$

$$2017. \iint_D \frac{dx dy}{(x-y)^2}; \quad 1 \leq x \leq 2, \quad 3 \leq y \leq 4.$$

$$2018. \iint_D y \cos^2 x dx dy; \quad 0 \leq x \leq 2\pi, \quad 0 \leq y \leq 1.$$

$$2019. \iint_D \ln(x+y) dx dy; \quad 1 \leq x \leq 2, \quad 0 \leq y \leq 1.$$

Обчислити подвійні інтеграли зведенням їх до повторних у разі області  $D$ , що обмежена даними лініями:

2020.  $\iint_D x dx dy$ ;  $x = 0$ ,  $y = x^3$ ,  $x + y = 2$ .

2021.  $\iint_D \sin(x + y) dx dy$ ;  $x = y$ ,  $y = 0$ ,  $x + y = \frac{\pi}{2}$ .

2022.  $\iint_D x^2 y dx dy$ ;  $y = 0$ ,  $y = 1 - x^2$ .

2023.  $\iint_D x^3 y dx dy$ ;  $y = x$ ,  $y^2 = x$ .

2024.  $\iint_D (1 - y^2 - x^2) dx dy$ ;  $x = 1$ ,  $y = x$ ,  $y = 2x$ .

2025.  $\iint_D (x + y) dx dy$ ;  $y = 1$ ,  $x = 0$ ,  $y = \sqrt{x}$ .

2026.  $\iint_D (x + 2y) dx dy$ ;  $x = 2$ ,  $y = 3$ ,  $y = x$ ,  $y = 2x$ .

2027.  $\iint_D y \ln x dx dy$ ;  $xy = 1$ ,  $x = 2$ ,  $y = \sqrt{x}$ .

2028.  $\iint_D (x^3 + y^3) dx dy$ ;  $x = 4$ ,  $x = 2y$ ,  $x = y$ .

2029.  $\iint_D (1 + 2x + 2y) dx dy$ ;  $y = x$ ,  $y = 0$ ,  $x + y = 1$ .

2030.  $\iint_D xy dx dy$ ;  $x + y = 2$ ,  $y = x^3$ ,  $y = 0$ .

2031.  $\iint_D (4 - y) dx dy$ ;  $y = 1$ ,  $4y = x^2$ ,  $x \geq 0$ .

2032.  $\iint_D x^3 y^2 dx dy$ ;  $x^2 + y^2 = 4$ .

2033.  $\iint_D (x^2 + y) dx dy$ ;  $y = x^2$ ,  $y^2 = x$ .

2034.  $\iint_D \frac{x^2}{y^2} dx dy$ ;  $x = 2$ ,  $y = x$ ,  $xy = 1$ .

2035.  $\iint_D \cos(x + y) dx dy$ ;  $x = 0$ ,  $y = \pi$ ,  $y = x$ .

2036.  $\iint_D \sqrt{1 - x^2 - y^2} dx dy$ ;  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ .

$$2037. \iint_D x^2 y^2 \sqrt{1-x^3-y^3} dx dy; \quad x^3+y^3=1, \quad x=0, \quad y=0.$$

$$2038. \iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{1-x^2-y^2}}; \quad x^2+y^2=1, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0.$$

$$2039. \iint_D \sqrt{x^2-y^2} dx dy; \quad x=1, \quad y=x, \quad y=-x.$$

Обчислити потрібні інтеграли, якщо область інтегрування  $V$  обмежена даними поверхнями:

$$2040. \iiint_V (2xz-3) dx dy dz; \quad x=-1, \quad x=2, \quad y=-2, \quad y=0, \quad z=0, \quad z=3y.$$

$$2041. \iiint_V (y+z) dx dy dz; \quad x=1, \quad x=2, \quad y=-1, \quad y=3, \quad z=0, \quad z=y.$$

$$2042. \iiint_V (x+y+z) dx dy dz, \quad x=y=z=0, \quad x=y=1, \quad z=2.$$

$$2043. \iiint_V \frac{dx dy dz}{(x+y+z+1)^3}; \quad x=y=z=0, \quad x+y+z=1.$$

$$2044. \iiint_V xy dx dy dz; \quad z=xy, \quad x+y=1, \quad z \geq 0.$$

$$2045. \iiint_V y \cos(x+z) dx dy dz; \quad y=\sqrt{x}, \quad y=z=0, \quad x+z=\frac{\pi}{2}.$$

$$2046. \iiint_V z dx dy dz; \quad x^2+y^2+z^2=1, \quad z \geq 0.$$

2047. В інтегралі  $\iint_D f(x, y) dx dy$  перейти до полярних координат  $\rho$  та  $\phi$  ( $x = \rho \cos \phi$ ,  $y = \rho \sin \phi$ ) та визначити відповідні межі інтегрування, якщо область  $D$  обмежена лініями:

а)  $x^2 + y^2 = R^2$ ;

б)  $x^2 + y^2 = 4x$ ;  $x^2 + y^2 = 8x$ ;  $y = x$ ;  $y = 2x$ ;

в)  $y = x$ ;  $y = 0$ ;  $x = 1$ ;

г)  $x^2 + y^2 = 4$ ;  $x + y \geq 2$ ;

д)  $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ ;  $x \geq 0$ .

За допомогою переходу до полярних координат обчислити такі подвійні інтеграли:

$$2048. \int_0^R dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \ln(x^2 + y^2 + 1) dy.$$

$$2049. \iint_D \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}} dx dy; \quad D = \{(x; y) \in R^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0, x \geq 0\}.$$

$$2050. \iint_D (2 - 2x - 3y) dx dy; \quad D = \{(x; y) \in R^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

$$2051. \iint_D \sqrt{9 - x^2 - y^2} dx dy; \quad D = \{(x; y) \in R^2 \mid x^2 + y^2 \leq 3x\}.$$

$$2052. \iint_D \arctg \frac{y}{x} dx dy; \quad D = \left\{ (x; y) \in R^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9, \frac{x}{\sqrt{3}} \leq y \leq x\sqrt{3} \right\}.$$

## 5.6. Застосування інтегралів у геометрії

**Завдання** (для підготовки до практичних занять: 2053—2058, 2073, 2101, 2117, 2127; для аудиторних занять: 2060, 2074, 2102, 2118, 2128; домашні: 2061—2063, 2075—2080, 2103, 2105, 2119, 2129; додаткові: 2068, 2087, 2108, 2109, 2122, 2132, 2138).

**2053.** Формула обчислення довжини дуги  $l$  гладкої кривої  $y = f(x)$ , що знаходиться між точками із абсцисами  $x = a$  та  $x = b$ , має вигляд:

$$\text{а) } l = \int_a^b f(x) dx; \quad \text{б) } l = \int_a^b x f(x) dx;$$

$$\text{в) } l = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx; \quad \text{г) } l = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx.$$

(Зазначте правильну відповідь).

**2054.** Формула для обчислення об'єму тіла, одержаного обертанням навколо осі  $Ox$  фігури, обмеженої лініями  $y = f(x)$ ,  $y = 0$ ,  $x = a$ ,  $x = b$ , має вигляд:

$$\text{а) } V = \int_a^b f^3(x) dx; \quad \text{б) } V = \pi \int_a^b f(x) dx;$$

$$\text{в) } V = \pi \int_a^b f^2(x) dx;$$

$$\text{г) } V = \int_a^b f^2(x) dx.$$

(Вкажіть правильну формулу.)

*Закінchte вирази:*

**2055.** Інтеграл  $\int_a^b f(x) dx$  дорівнює площі фігури, обмеженої лініями:  $y = f(x)$ ,  $y = 0$ ,  $x = a$ ,  $x = b$ , якщо ...

**2056.** Формула обчислення площі області  $D$  через подвійний інтеграл має вигляд: ...

**2057.** Формула обчислення об'єму циліндроїда, обмеженого поверхнями  $z = f(x, y)$ ,  $z = 0$ ,  $x^2 + y^2 = a^2$ , через подвійний інтеграл має вигляд: ...

**2058.** Формула обчислення об'єму тривимірної області  $V$  через потрійний інтеграл має вигляд: ...

Знайти довжини дуг ліній, що задані рівняннями:

**2059.**  $y = \ln \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$  від  $x = 1$  до  $x = 2$ .

**2060.**  $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$  від  $x = 0$  до  $x = 2$ .

**2061.**  $y^2 = 2x$  від  $x = 0$  до  $x = 1$ .

**2062.**  $y = \ln x$  від  $x = \sqrt{3}$  до  $x = \sqrt{8}$ .

**2063.**  $y = \ln(1 - x^2)$  від  $x = 0$  до  $x = \frac{1}{2}$ .

**2064.**  $y = 2\sqrt{x}$  від  $x = 0$  до  $x = 1$ .

**2065.**  $y = e^x$  від  $x = 0$  до  $x = 1$ .

**2066.**  $y = \arcsin e^{-x}$  від  $x = 0$  до  $x = 1$ .

**2067.**  $y = \frac{x^2}{4} - \ln \sqrt{x}$  від  $x = 1$  до  $x = e$ .

**2068.**  $y = \ln \cos x$  від  $x = 0$  до  $x = \frac{\pi}{3}$ .

**2069.**  $y = \sqrt[3]{x^2}$  від  $x = 0$  до  $x = 4$ . **2070.**  $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$  (всієї кривої).

**2071.**  $y = \sqrt{x - x^2} + \arcsin \sqrt{x}$  (всієї кривої).

**2072.**  $y^2 = (x + 1)^3$ , що відтинається прямою  $x = 4$ .

За допомогою визначених інтегралів обчислити площі фігур, що обмежені лініями:

**2073.**  $y = 1 - x^2$ ;  $y = x^2 - 7$ .

**2074.**  $4y = x^2$ ;  $y^2 = 4x$ .

**2075.**  $y = x^2 + 4x$ ;  $y = x + 4$ .

**2076.**  $y = e^x$ ;  $y = e^{-x}$ ;  $x = 1$ .

**2077.**  $y = -x^2 + 9$ ;  $y = 2x + 1$ .

**2078.**  $y = x^2$ ;  $y = 2 - x^2$ .

**2079.**  $y = x^2$ ;  $y = 2 - x$ .

**2080.**  $xy = 9$ ;  $y = 6$ ;  $x = 3$ ;  $x = 0$ ;  $y = 0$ .

**2081.**  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ .

**2082.**  $y^2 = 2x + 4$ ;  $x = 0$ .

**2083.**  $y^2 = x^3$ ;  $y = 8$ ;  $x = 0$ .

**2084.**  $y^2 = x$ ;  $x - y - 6 = 0$ .

**2085.**  $(y - x)^2 = x^3$ ;  $x = 1$ .

**2086.**  $x^2 + y^2 = 8$ ;  $y = \frac{x^2}{2}$ .

**2087.**  $y^2 = 16 - 8x$ ;  $y^2 - 24x = 48$ .

**2088.**  $xy = 4$ ;  $x = 1$ ;  $x = 4$ ;  $y = 0$ .

**2089.**  $y = -x^2$ ;  $x + y + 2 = 0$ .

**2090.**  $y = x^2 - 1$ ;  $2x + y - 2 = 0$ .

**2091.**  $y = x^2$ ;  $y = 8 - x^2$ .

**2092.**  $xy = 3$ ;  $x + y = 4$ .

**2093.**  $y = -x^2$ ;  $y = 5x^2 - 6$ .

**2094.**  $y^2 = 2x$ ;  $y = x$ .

**2095.**  $y = x^2$ ;  $x = y^2$ .

**2096.**  $y^2 = 2x + 1$ ;  $x = 1$ .

**2097.**  $y^2 = 1 - x$ ;  $x = -3$ .

**2098.**  $y = e^x$ ;  $y = e^{-x}$ ;  $x = 1$ .

**2099.**  $xy = 6$ ;  $x + y - 7 = 0$ .

**2100.**  $y^2 = 2x + 1$ ;  $x - y - 1 = 0$ .

За допомогою визначених інтегралів обчислити об'єми тіл, утворених обертанням фігур, що обмежені лініями:

**2101.**  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ;  $y = \pm b$ , навколо осі  $Oy$ .

**2102.**  $xy = 4$ ;  $x = 1$ ;  $x = 4$ ;  $y = 0$ , навколо осі  $Ox$ .

**2103.**  $y^2 = 1 - x$ ;  $x = 0$ , навколо осі  $Oy$ .

**2104.**  $y = x^3$ ;  $y = 0$ ;  $x = 2$ , навколо осі  $Oy$ .

**2105.**  $y = x^2$ ;  $y = x + 6$ , навколо осі  $Ox$ .

**2106.**  $x^2 - y^2 = a^2$ ;  $x = \pm a$ , навколо осі  $Ox$ .

**2107.**  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , навколо осі  $Oy$ .

**2108.**  $y^2 = 2x + 1$ ;  $x = 0$ , навколо осі  $Ox$ .

**2109.**  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ ;  $y = \pm 3$ , навколо осі  $Oy$ .

**2110.**  $y = x^2$ ;  $y = 0$ ;  $x = 2$ , навколо осі  $Ox$ .

**2111.**  $xy = 9$ ;  $y = 3$ ;  $y = 9$ ;  $x = 0$ , навколо осі  $Oy$ .

**2112.**  $y = \sin x$ ;  $0 \leq x \leq \pi$ ;  $y = 0$ , навколо осі  $Ox$ .

**2113.**  $y = x^3$ ;  $x = 0$ ;  $y = 8$ , навколо осі  $Oy$ .

**2114.**  $x^2 - y^2 = 4$ ;  $y = \pm 2$ , навколо осі  $Oy$ .

**2115.**  $y = x^2$ ;  $y^2 = x$ , навколо осі  $Ox$ .

**2116.**  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ , навколо осі  $Oy$ .

За допомогою подвійних інтегралів обчислити площі фігур, обмежених лініями:

**2117.**  $y = x^2$ ;  $y = x + 2$ .

**2118.**  $x = y^2 - 2y$ ;  $x + y = 0$ .

**2119.**  $y = \sin x$ ;  $y = \cos x$ ;  $x = 0$ .

$$2120. x = 0; y = 0; x + y = 1.$$

$$2121. x = y; y = 5x; x = 1.$$

$$2122. 9x^2 + 4y^2 = 36.$$

$$2123. y = \sqrt{x}; y = 2\sqrt{x}; x = 4.$$

$$2124. (x^2 + y^2)^2 = 2x^3.$$

$$2125. x^3 + y^3 = 2xy; x \geq 0; y \geq 0.$$

$$2126. (x + y)^5 = x^2 y^2; x \geq 0; y \geq 0.$$

За допомогою подвійних інтегралів обчислити об'єми тіл, обмежених поверхнями:

$$2127. z = 5 - x; y^2 = 5x; z = 0.$$

$$2128. z = x^2 + y^2; y = x^2; y = 1; z = 0.$$

$$2129. x = y = z = 0; x = 4; y = 4; z = x^2 + y^2 + 1.$$

$$2130. x = y = z = 0; x = 1; y = 2; z = x^2 + y^2.$$

$$2131. x = y = z = 0; 6x + 3y + 2z - 6 = 0.$$

$$2132. y = z = 0; 3x + y = 6; 3x + 2y = 12; x + y + z = 6.$$

$$2133. z = x^2 + y^2; x = y = z = 0; x + y = 1.$$

$$2134. z = x^2 + y^2; z = 0; y = 1; y = 2x; x + y = 6.$$

$$2135. y = \sqrt{x}; y = 2\sqrt{x}; z = 0; x + z = 6.$$

$$2136. x = y = z = 0; 2x + 3y - 12 = 0; 2z = y^2.$$

$$2137. z = 9 - y^2; 3x + 4y = 12; x = y = z = 0; y \geq 0.$$

За допомогою потрійних інтегралів обчислити об'єми тіл, що обмежені поверхнями:

$$2138. z = 4 - y^2; z = y^2 + 2; x = -1; x = 2.$$

$$2139. z = x^2 + y^2; z = x^2 + 2y^2; y = x; y = 2x; x = 1.$$

$$2140. z = x^2 + y^2; z = 2x^2 + 2y^2; y = x^2; y = x.$$

$$2141. z = \ln(x + 2); z = \ln(6 - x); x = 0; x + y = 2; x - y = 2.$$

$$2142. (x - 1)^2 + y^2 = z; 2x + z = 2.$$



### 6.1. Загальні поняття

**Завдання** (для підготовки до практичних занять: 2143—2153, 2161, 2170, 2174, 2183; для аудиторних занять: 2159, 2168, 2172, 2178, 2179, 2184; домашні: 2154—2158, 2152—2167, 2171, 2175—2177; додаткові: 2160, 2169, 2173, 2181, 2185, 2186).

**2143.** Порядок звичайного диференціального рівняння визначається за: а) найвищим степенем функції; б) найвищим степенем похідної функції; в) сумою порядків всіх похідних рівняння; г) порядком старшої похідної. (Виберіть правильну відповідь.)

*Закінchte вирази:*

**2144.** Звичайним диференціальним рівнянням  $n$ -го порядку називається...

**2145.** Розв'язком диференціального рівняння називається ...

**2146.** Яка з наведених рівностей є загальним розв'язком диференціального рівняння  $y''' - y'' = 0$ , а яка — частинним?

а)  $y = x + 5$ ;

б)  $y = C_1 x + C_2$ ;

в)  $y = C_1 + C_2 x + C_3 e^x$ ;

г)  $y = C e^x$ ;

д)  $y = C_1 x + C_2 + 2e^x$ .

**2147.** Загальним розв'язком диференціального рівняння  $n$ -го порядку називається...

**2148.** Частинним інтегралом диференціального рівняння першого порядку називається...

**2149.** Сформулюйте теорему Коші для рівняння  $y' = f(x; y)$ .

**2150.** Задача Коші полягає в тому, що ...

**2151.** Особливим розв'язком диференціального рівняння називається...

**2152.** Для диференціального рівняння  $y' = 3y^{\frac{2}{3}}$  встановіть, які із наведених нижче функцій будуть загальним, частинним або особливим розв'язком:

а)  $y = (x + 2)^3$ ;                      б)  $y = (x + c)^3$ ;

в)  $y = x^3$ ;                                г)  $y = 0$ ;

д)  $y = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$ ;        е)  $y = 2x^3$ .

Визначте, чи будуть розв'язками наведених диференціальних рівнянь зазначені поряд функції:

**2153.**  $xy' = 2y$ ;  $y = 5x^2$ .

**2154.**  $y'' = x^2 + y^2$ ;  $y = \frac{1}{x}$ .

**2155.**  $(x + y) dx + x dy = 0$ ;  $y = \frac{C - x^2}{2x}$ .

**2156.**  $y'' + y = 0$ ;  $y = 3\sin x - 4\cos x$ .

**2157.**  $y'' - 2y' + y = 0$ ;  $y = x^2 e^x$ .

**2158.**  $(x - 2y)y' = 2x - y$ ;  $x^2 - xy + y^2 = C$ .

**2159.**  $(x - y + 1)y' = 1$ ;  $y = x + Ce^y$ .

**2160.**  $(xy - x)y'' + x(y')^2 + yy' - 2y' = 0$ ;  $y = \ln(xy)$ .

Скласти диференціальне рівняння для заданої сім'ї кривих:

**2161.**  $y = Cx$ .

*Розв'язання.*

$$y = Cx \Leftrightarrow \ln y = \ln Cx \Leftrightarrow \ln y = \ln C + \ln x;$$

$$(\ln y)' = (\ln C + \ln x)';$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{x};$$

$$xy' - y = 0.$$

$$2162. y = Cx^2.$$

$$2163. y^2 = 2Cx.$$

$$2164. x^2 + y^2 = C.$$

$$2165. y = Ce^x.$$

$$2166. x^3 = C(x^2 - y^2).$$

$$2167. y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}.$$

$$2168. y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x.$$

$$2169. y = (C_1 + C_2 x)e^x + C_3.$$

Знайти інтегральну криву, що належить даній сім'ї кривих та задовольняє початкові умови:

$$2170. y = (C_1 + C_2 x)e^{2x}; \quad y(0) = 0; \quad y'(0) = 1.$$

*Розв'язання.*

$$y = (C_1 + C_2 x)e^{2x} \Rightarrow 0 = (C_1 + C_2 \cdot 0)e^0;$$

$$y' = C_2 e^{2x} + 2(C_1 + C_2 x)e^{2x} \Rightarrow 1 = C_2 e^0 + 2(C_1 + C_2 \cdot 0)e^0;$$

$$\begin{cases} C_1 = 0; \\ 2C_1 + C_2 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} C_1 = 0; \\ C_2 = 1 \end{cases} \quad y = xe^{2x}.$$

$$2171. x^2 - y^2 = C; \quad y(0) = 5.$$

$$2172. y = C_1 \sin(x - C_2); \quad y(\pi) = 1; \quad y'(\pi) = 0.$$

$$2173. y = C_1 e^{-x} + C_2 e^x + C_3 e^{2x}; \quad y(0) = 0; \quad y'(0) = 1; \quad y''(0) = -2.$$

За допомогою диференціальних рівнянь розв'яжіть такі задачі:

2174. Знайти рівняння кривої, що проходить через точку  $M_0(-2; 5)$ , якщо тангенс кута нахилу дотичної ( $\operatorname{tg} \alpha$ ) до неї у будь-якій точці  $M(x; y)$  дорівнює абсцисі цієї точки.

*Розв'язання.*

Нехай рівнянням шуканої кривої  $l$  буде  $y = f(x)$ . За умовою задачі  $\operatorname{tg} \alpha = y' = x$ , тобто одержали рівняння  $y' = x$ , яке містить похідну функції  $y$ , з якого знайдемо невідому поки що функцію  $y = f(x)$  у такий спосіб:

$$y' = x \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = x \Leftrightarrow dy = x dx \Leftrightarrow \int dy = \int x dx \Leftrightarrow y = \frac{x^2}{2} + C.$$

Розв'язком рівняння  $y' = x$  виявилась однопараметрична сім'я парабол  $y = \frac{x^2}{2} + C$ , з яких треба вибрати ту, котра проходить через точку  $M_0(-2; 5)$ . Підставимо координати цієї точки в рівняння:

$$M_0 \in l \Leftrightarrow 5 = \frac{(-2)^2}{2} + C \Leftrightarrow C = 3.$$

Отже, рівнянням шуканої кривої буде:  $y = \frac{x^2}{2} + 3$ .

**2175.** Знайти рівняння лінії, яка проходить через точку  $(2; 3)$ , якщо будь-який відрізок її дотичної, що знаходиться між координатними осями у точці дотику, поділяється навпіл.

**2176.** Знайти рівняння лінії, яка проходить через точку  $(2; 0)$ , якщо довжина будь-якого відрізка її дотичної між точкою дотику та віссю ординат є сталою величиною і дорівнює двом.

**2177.** Знайти рівняння сім'ї кривих, у яких відрізок дотичної між точкою дотику та віссю абсцис поділяється навпіл у точці перетину його з віссю ординат.

**2178.** Знайти рівняння сім'ї кривих, у яких довжина відрізка нормалі від точки на лінії до осі абсцис є сталою величиною і дорівнює одиниці.

**2179.** Знайти рівняння лінії, яка проходить через точку  $\left(1; \frac{1}{3}\right)$ , якщо кутовий коефіцієнт дотичної до неї у будь-якій точці лінії втричі більший, ніж кутовий коефіцієнт радіус-вектора точки дотику.

**2180.** Знайти рівняння лінії, яка проходить через точку  $(-1; 1)$ , якщо кутовий коефіцієнт дотичної у будь-якій точці лінії дорівнює квадрату ординати точки дотику.

**2181.** Знайти рівняння лінії, яка проходить через точку  $(1; 1)$ , якщо довжина відрізка, який відтинає дотична до лінії на осі абсцис, дорівнює квадрату абсциси точки дотику.

**2182.** Знайти рівняння сім'ї кривих, у яких радіус-вектор будь-якої точки дорівнює довжині відрізка нормалі до кривої між точкою кривої та віссю абсцис.

**2183.** Із статистики відомо, що кількість новонароджених як і кількість померлих за певний проміжок часу пропорційні до чисельності населення з коефіцієнтами відповідно  $K_1$  і  $K_2$ . Знайти формулу, що визначає зміни чисельності населення з часом.

*Розв'язання.*

Нехай кількість населення у довільний момент часу  $t$  виражається функцією  $y(t)$ .

Із умови задачі випливає, що за певний проміжок часу, наприклад за один рік, кількість новонароджених буде дорівнювати  $K_1 \cdot y(t) \cdot 1$ , а померлих —  $K_2 \cdot y(t) \cdot 1$ . Тоді приріст населення за один рік становитиме:  $\Delta y = (K_1 - K_2) \cdot y(t) \cdot 1$ . Замінімо для довільного проміжку часу  $\Delta t$  прирости функції та аргументу їх диференціалами, що дасть змогу записати таке рівняння:

$$dy = (K_1 - K_2)y dt \text{ або } \frac{dy}{y} = (K_1 - K_2)y,$$

яке містить диференціали першого порядку функції та аргументу. Розв'язання цього рівняння зводиться до таких дій:

$$\begin{aligned} dy = (K_1 - K_2)y dt &\Leftrightarrow \frac{dy}{y} = (K_1 - K_2)dt \Leftrightarrow \int \frac{dy}{y} = \int (K_1 - K_2)dt \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \ln|y| = \ln C_1 + (K_2 - K_1)t \Leftrightarrow y = Ce^{(K_1 - K_2)t}. \end{aligned}$$

Нехай відомо, що в початковий момент часу  $t_0 = 0$  кількість населення дорівнювала  $y_0$ :  $y(0) = y_0$ . Використовуючи цю умову, виберемо із однопараметричної множини функцій  $y = Ce^{(K_1 - K_2)t}$  ту, що задовольняє цю умову, знайшовши певне значення довільної сталої  $C$ :

$$y_0 = Ce^{(K_1 - K_2)0} \Leftrightarrow y_0 = C.$$

Остаточна формула народонаселення має вигляд:

$$y = y_0 e^{(K_1 - K_2)t}.$$

**2184.** За який час тіло, нагріте до  $100^\circ$ , охолоне до  $25^\circ$  при температурі навколишнього середовища  $20^\circ$ , якщо до  $60^\circ$  воно охолоджується за 10 хвилин? (За законом Ньютона швидкість охолодження пропорційна різниці температур.)

**2185.** Моторний човен рухається в стоячій воді зі швидкістю 10 км/год. На повному ході мотор було вимкнено і через 20 с швидкість човна зменшилась до 6 км/год. Вважаючи, що сила спротиву води руху човна пропорційна її швидкості, знайдіть швидкість човна через 2 хвилини після зупинки мотора.

**2186.** Диск, який спочатку обертався із кутовою швидкістю 3 об/с, через одну хвилину обертається зі швидкістю 2 об/с. Якою буде його кутова швидкість через три хвилини після початку обертання, якщо сила тертя пропорційна кутовій швидкості обертання?

## 6.2. Диференціальні рівняння першого порядку

**Завдання** (для підготовки до практичних занять: 2187, 2195, 2214, 2226, 2246, 2266, 2279; для аудиторних занять: 2196, 2215, 2229, 2247, 2269, 2280, 2304; домашні: 2197, 2224, 2236, 2237, 2250, 2269, 2281, 2300; додаткові: 2225, 2238, 2245, 2262, 2278, 2288, 2306—2318).

*Закінchte вирази:*

**2187.** Диференціальне рівняння з відокремленими змінними має вигляд: ...

**2188.** Диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними в диференціалах або розв'язане відносно похідної має вигляд: ...

**2189.** Однорідне диференціальне рівняння 1-го порядку в диференціалах або розв'язане відносно похідної буде таким: ...

**2190.** Лінійним диференціальним рівнянням називається ...

**2191.** Лінійне диференціальне рівняння називається однорідним (неоднорідним), якщо ...

**2192.** Рівняння Бернуллі має вигляд: ...

**2193.** Диференціальне рівняння у повних диференціалах буде таким: ...

**2194.** Встановити тип диференціального рівняння:

а)  $xy + y^2 = (2x^2 + xy)y'$ ;      б)  $x + xy + y'(y + xy) = 0$ ;

в)  $y' + xy = xy^3$ ;      г)  $yy' = 2y - 3$ ;

д)  $y' \cos x - y \sin x = \sin 2x$ ;      е)  $y'x^2 + ye^x = \cos x$ ;

є)  $3x^2 + 6xy^2 + y'(6x^2y + 4y^3) = 0$ ;

ж)  $xy' \cos \frac{y}{x} = y \sin \frac{y}{x}$ .

Знайти загальний розв'язок чи загальний інтеграл для таких диференціальних рівнянь:

**2195.**  $(x^2 + 1)dy = 2xydx$ .

*Розв'язання.*

Впевнюємося, що дане рівняння належить до рівнянь з відокремлюваними змінними в диференціалах.

Нехай  $y \neq 0$ . Розділимо обидві частини рівняння на  $y(x^2 + 1) \neq 0$ , тоді одержимо рівняння з відокремленими змінними

$$\frac{dy}{y} = \frac{2x}{x^2 + 1} dx.$$

Після інтегрування матимемо:

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{2x dx}{x^2 + 1}; \quad \ln|y| = \ln(x^2 + 1) + C_1.$$

Довільну сталу  $C_1$ , що є будь-яким дійсним числом, у даному разі доцільно записати у логарифмічному вигляді:  $C_1 = \ln C$ ,  $C \neq 0$ , бо величина  $\ln C$  може також бути будь-яким дійсним числом. Загальний інтеграл перепишемо так:

$$\ln|y| = \ln(x^2 + 1) + \ln C, \quad \ln|y| = \ln C(x^2 + 1).$$

Після потенціювання одержимо

$$\begin{cases} |y| = |C|(x^2 + 1); \\ y \neq 0, \quad C \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \neq 0, \quad C \neq 0; \\ y = C(x^2 + 1); \\ y = -C(x^2 + 1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \neq 0, \quad C \neq 0; \\ y = C(x^2 + 1). \end{cases}$$

Останнє перетворення справедливе, бо добуток числа, що не дорівнює нулю ( $-1 \neq 0$ ), на довільну сталу є довільною сталою величиною.

Розглянемо тепер рівняння  $y(x^2 + 1) = 0$ . Воно має розв'язок  $y = 0$ . Цей розв'язок буде розв'язком диференціального рівняння, і його формально можна було б одержати із загального розв'язку при  $C = 0$ , знявши відповідні обмеження  $y \neq 0$ ,  $C \neq 0$ . Остаточо загальним розв'язком диференціального рівняння буде:

$$y = C(x^2 + 1), \quad C \in R.$$

Розв'язок  $y = 0$  буде частинним розв'язком диференціального рівняння. Особливих розв'язків це рівняння не має, однак слід зауважити, що однопараметричною сім'єю ліній при  $C \neq 0$  є параболи, а розв'язок  $y = 0$  — пряма лінія.

**2196.**  $\operatorname{tg} x \sin^2 y dx + \cos^2 x \operatorname{ctg} y dy = 0.$

**2197.**  $xy' = y.$

**2198.**  $2xy' + y = 0.$

**2199.**  $yy' + x = 0.$

**2200.**  $y' = 2y.$

$$2201. y^2 y' = x^3.$$

$$2202. x^2 y' + y = 0.$$

$$2203. xy y' = 1 + x^2.$$

$$2204. x^3 y' = 2y.$$

$$2205. xy' = 2y.$$

$$2206. y' \operatorname{tg} x = y.$$

$$2207. x^3 y' = y^3.$$

$$2208. 2\sqrt{x} y' = y.$$

$$2209. y' = 3y\sqrt{x}.$$

$$2210. \sqrt{1-x^2} y' = y.$$

$$2211. xy y' = 1 - x^2.$$

$$2212. xy' - y = y^3.$$

$$2213. y' = (x + y)^2.$$

Знайти частинні розв'язки диференціальних рівнянь, що задовольняють задані початкові умови:

$$2214. y' + xy = xy^2; \quad y = 2 \text{ при } x = 0. \text{ (Задача Коші.)}$$

*Розв'язання.*

Розв'яжемо це рівняння відносно похідної, і одержану праву частину рівняння розкладемо на множники:

$$y' = xy^2 - xy, \quad y' = x(y^2 - y).$$

Переконаємося в тому, що дане рівняння є диференціальним рівнянням з відокремлюваними змінними, розв'язаним відносно похідної. Отже, послідовність інтегрування даного рівняння така:

$$\frac{dy}{dx} = x(y^2 - y); \quad dy = x(y^2 - y) dx;$$

$$\frac{dy}{y^2 - y} = x dx; \quad \int \frac{dy}{y^2 - y} = \int x dx;$$

$$\int -\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y-1}\right) dy = \int x dx;$$

$$\ln \left| \frac{y-1}{y} \right| = \ln e^{x^2/2} + \ln C;$$

$$\frac{y-1}{y} = Ce^{x^2/2}; \quad 1 - \frac{1}{y} = Ce^{x^2/2};$$

$$y = \frac{1}{1 - Ce^{x^2/2}}.$$

Скористаємося початковими умовами ( $y(0)=2$ ):

$$2 = \frac{1}{1-C}; \quad 2(1-C)=1; \quad C = \frac{1}{2}.$$

Отже, розв'язком задачі Коші буде:

$$y = \frac{2}{2 - e^{x^2/2}}.$$

**2215.**  $xy' = 1 + y^2$ ,  $y = 0$  при  $x = 1$ .

**2216.**  $y' = 2x + 2xy$ ,  $y = 0$  при  $x = 1$ .

**2217.**  $y' = \frac{y}{\sqrt{x^2 + 1}}$ ,  $y = 1$  при  $x = 0$ .

**2218.**  $(1 + x^2)y' = 2xy$ ,  $y = 2$  при  $x = 0$ .

**2219.**  $y' \operatorname{tg} x = y$ ,  $y = 1$  при  $x = \frac{\pi}{2}$ .

**2220.**  $y' = 2\sqrt{y} \ln x$ ,  $y = 1$  при  $x = e$ .

**2221.**  $(1 + x^2)y' + y\sqrt{1 + x^2} = xy$ ,  $y = 1$  при  $x = 0$ .

**2222.**  $y' \sin x = y \ln y$ ,  $y = e$  при  $x = \frac{\pi}{2}$ .

**2223.**  $x + xy + y'(y + xy) = 0$ ,  $y = 0$  при  $x = 0$ .

**2224.**  $(1 + e^x)yy' = e^x$ ,  $y = 1$  при  $x = 0$ .

**2225.**  $(xy^2 + x)dx + (x^2y - y)dy = 0$ ,  $y = 1$  при  $x = 0$ .

Знайти загальні або частинні розв'язки однорідних диференціальних рівнянь:

**2226.**  $y' = \frac{y}{x} + \sin \frac{y}{x}$ ;  $y = \frac{\pi}{2}$  при  $x = 1$ .

*Розв'язання.*

Функція  $f(x, y) = \frac{y}{x} + \sin \frac{y}{x}$  — однорідна функція нульового порядку однорідності, бо

$$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda y}{\lambda x} + \sin \frac{\lambda y}{\lambda x} = \frac{y}{x} + \sin \frac{y}{x} = f(x, y).$$

Отже, дане рівняння — однорідне і його можна інтегрувати підстановкою  $y = ux$ ;  $y' = xu' + u$ ;  $u = \frac{y}{x}$ . Тоді дістанемо:

$$xu' + u = u + \sin u; \quad \frac{du}{dx} = \frac{\sin u}{x};$$

$$\frac{du}{\sin u} = \frac{dx}{x}; \quad \int \frac{du}{\sin u} = \int \frac{dx}{x};$$

$$\ln \left| \operatorname{tg} \frac{u}{2} \right| = \ln |x| + \ln C; \quad \operatorname{tg} \frac{u}{2} = Cx;$$

$$u = 2 \operatorname{arctg}(Cx).$$

Повертаємося до старих змінних  $x$  і  $y$ :

$$\frac{y}{x} = 2 \operatorname{arctg}(Cx); \quad y = 2x \operatorname{arctg}(Cx).$$

Скориставшись початковими умовами, маємо:

$$\frac{\pi}{2} = 2 \operatorname{arctg} C; \quad C = 1.$$

Отже, частинним розв'язком рівняння є такий:

$$y = 2x \operatorname{arctg} x.$$

$$2227. \quad y' = \frac{x+y}{x}.$$

$$2228. \quad y' = \frac{2y}{x}.$$

$$2229. \quad y' = \frac{x^2 + xy + y^2}{x^2}.$$

$$2230. \quad y' = \frac{y^2}{x^2} - \frac{y}{x}.$$

$$2231. \quad y' = 2 \frac{x+y}{x}; \quad y=1 \text{ при } x=1.$$

$$2232. \quad y' = \frac{y^2}{x^2} + \frac{y}{x}; \quad y=1 \text{ при } x=1.$$

$$2233. \quad y' = \frac{y}{x} + \sin \frac{2y}{x}; \quad y = \frac{\pi}{4} \text{ при } x=1.$$

$$2234. y' = \frac{2yx + y^2}{x^2}; \quad y = 1 \text{ при } x = 1.$$

$$2235. y' = \frac{y}{x} + \operatorname{tg} \frac{y}{x}; \quad y = \frac{\pi}{4} \text{ при } x = 1.$$

$$2236. y' = \frac{y + \sqrt{y^2 + x^2}}{x}; \quad y = 0 \text{ при } x = 1.$$

$$2237. xy' \cos \frac{y}{x} = y \cos \frac{y}{x} - x; \quad y = \frac{\pi}{2} \text{ при } x = 1.$$

$$2238. y - \sqrt{x^2 + y^2} = xy'; \quad y = 0 \text{ при } x = 1.$$

$$2239. xy' = y \left( 1 + \ln \frac{y}{x} \right); \quad y = \frac{1}{\sqrt{e}} \text{ при } x = 1.$$

$$2240. yy' + 2\sqrt{xy} = x; \quad y = 0 \text{ при } x = 1.$$

$$2241. xy' - y = x \operatorname{tg} \frac{y}{x}; \quad y = \frac{\pi}{2} \text{ при } x = 1.$$

$$2242. xy' - y \cos \ln \frac{y}{x} = 0.$$

$$2243. xy' = xe^{\frac{y}{x}} + y; \quad y = 0 \text{ при } x = 1.$$

$$2244. (2x - y + 4)dy + (x - 2y + 5)dx = 0.$$

$$2245. y'(1 + x + y) = 1 - 3x - 3y.$$

За допомогою методу Бернуллі розв'язати такі рівняння:

$$2246. xy' + y = e^x, \quad y = 0 \text{ при } x = 1.$$

*Розв'язання.*

Згідно з алгоритмом методу Бурнуллі в рівняння підставимо  $y = uv$ ,  $y' = u'v + uv'$ , тоді дістанемо:

$$x(u'v + uv') + uv = e^x \Rightarrow xu'v + u(v + xv') = e^x.$$

Прирівнюючи коефіцієнт при функції  $u$  до нуля, дістанемо таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} xv' + v = 0; \\ xu'v = e^x. \end{cases}$$

Розв'язуємо перше рівняння системи:

$$xv' + v = 0; \quad v' = -\frac{v}{x};$$

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{v}{x}; \quad \frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x};$$

$$\int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dx}{x},$$

$$\ln|v| = -\ln|x|; \quad v = \frac{1}{x}.$$

Підставляємо функцію  $v = \frac{1}{x}$  у друге рівняння системи і розв'язуємо його:

$$xu' \frac{1}{x} = e^x; \quad \frac{du}{dx} = e^x; \quad du = e^x dx;$$

$$\int du = \int e^x dx; \quad u = e^x + C.$$

Загальний розв'язок рівняння дорівнює добутку знайдених функцій  $u$  та  $v$  і має вигляд:

$$y = uv = \frac{1}{x}(e^x + C).$$

Скориставшись початковими умовами, знаходимо значення довільної сталої  $C$ , що їм відповідає:

$$y(1) = 0 \Rightarrow 0 = \frac{1}{1}(e^1 + C) \Rightarrow C = -e.$$

Частинний розв'язок рівняння такий:

$$y = \frac{1}{x}(e^x - e).$$

**2247.**  $xy' + y = 2x.$

**2248.**  $xy' + 2y = 1.$

$$2249. xy' - y = x; \quad y = 0 \text{ при } x = 1.$$

$$2250. xy' + 3y = x^{-3}; \quad y = 0 \text{ при } x = 1.$$

$$2251. x^2 y' = y - 3; \quad y = 0 \text{ при } x = 1.$$

$$2252. y' - \operatorname{tg} x \cdot y = \frac{1}{\cos x}; \quad y = 0 \text{ при } x = 1.$$

$$2253. y' - y \operatorname{tg} x = \operatorname{ctg} x.$$

$$2254. y' \sin x + y \cos x = 2x; \quad y = \frac{\pi^2}{4} \text{ при } x = \frac{\pi}{2}.$$

$$2255. y' - \frac{y}{1-x^2} = x + 1; \quad y = 0 \text{ при } x = 1.$$

$$2256. (3+x)y' + y = 3x^2; \quad y = 0 \text{ при } x = 1.$$

$$2257. y' + 2y = e^x.$$

$$2258. y' - 2y = e^{2x}.$$

$$2259. y' + 4y = x^2 + 2x.$$

$$2260. y' = y \operatorname{tg} x + \cos x.$$

$$2261. y' - \frac{2y}{x} = x.$$

$$2262. y' - y = e^x x; \quad y = 0 \text{ при } x = 0.$$

$$2263. y' + y \operatorname{ctg} x = x.$$

$$2264. xy' + y = xy^2.$$

$$2265. 2xy' - y = x^2 y^3.$$

Методом варіації довільної сталої розв'язати рівняння:

$$2266. xy' + 2y = e^{-x^2}.$$

*Розв'язання.*

Розв'яжемо відповідне однорідне рівняння:

$$xy' + 2y = 0; \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{2y}{x}; \quad \frac{dy}{y} = -\frac{2dx}{x};$$

$$\int \frac{dy}{y} = -2 \int \frac{dx}{x}; \quad \ln|y| = -2 \ln|x| + \ln C; \quad y = \frac{C}{x^2}.$$

Розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді:

$$y = \frac{C(x)}{x^2}.$$

У рівняння даної задачі підставимо вирази

$$y = C(x) \frac{1}{x^2} \text{ та } y' = C'(x) \frac{1}{x^2} - C(x) \frac{2}{x^3}.$$

Тоді дістанемо:

$$x \left( C'(x) \frac{1}{x^2} - C(x) \frac{2}{x^3} \right) + 2C(x) \frac{1}{x^2} = e^{-x^2};$$

$$\frac{dC}{dx} \frac{1}{x} = e^{-x^2}; \quad dC = x e^{-x^2} dx,$$

$$\int dC = \int x e^{-x^2} dx; \quad C(x) = -\frac{1}{2} e^{-x^2} + C_1.$$

Отже, загальний розв'язок рівняння такий:

$$y = C(x) \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2} \left( -\frac{1}{2} e^{-x^2} + C_1 \right).$$

**2267.**  $y' + 2y = 4x.$

**2268.**  $y' + 2xy = x e^{-x^2}.$

**2269.**  $x^2 y' + y(1 - 2x) = x^2.$

**2270.**  $(1 + x^2) y' - 2xy = (1 + x^2)^2.$

**2271.**  $y' + y = \cos x.$

**2272.**  $2y dx + (y^2 - 6x) dy = 0.$

**2273.**  $y'(2x - y^2) = 1.$

**2274.**  $(2y \ln y + y - x) y' = y.$

**2275.**  $x(y' - y) = (1 + x^2) e^x.$

**2276.**  $xy' - \frac{y}{x+1} = x; \quad y = 0 \text{ при } x = 1.$

**2277.**  $2xyu' + x = y^2.$

**2278.**  $3x dy = y(1 + x \sin x - 3y^3 \sin x) dx.$

Розв'язати диференціальні рівняння в повних диференціалах:

**2279.**  $(3x^2 y + 2) dx + (x^3 + 3y^2) dy = 0.$

*Розв'язання.*

Для цього рівняння виконується умова:

$$\frac{\partial(3x^2 y + 2)}{\partial y} = \frac{\partial(x^3 + 3y^2)}{\partial x} = 3x^2,$$

а тому воно є рівнянням у повних диференціалах, тобто його можна записати так:

$$du = 0, \text{ де } \frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2y + 2, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x^3 + 3y^2.$$

Отже, можна записати такий інтеграл:

$$\frac{du}{dx} = 3x^2y + 2 \Rightarrow u = \int (3x^2y + 2) dx + \varphi(y) = x^3y + 2x + \varphi(y).$$

З другого боку, має місце таке рівняння:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x^3 + 3y^2 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y} (x^3y + 2x + \varphi(y)) = x^3 + 3y^2.$$

Розв'язуючи його, знаходимо функцію  $\varphi(y)$ :

$$x^3 + \frac{d\varphi}{dy} = x^3 + 3y^2; \quad d\varphi = 3y^2 dy;$$

$$\int d\varphi = \int 3y^2 dy; \quad \varphi = y^3 + C_1.$$

Отже, початкове рівняння можна записати так:

$$du = d(x^3y + 2x + y^3 + C_1) = 0.$$

Загальний інтеграл цього рівняння має вигляд:

$$x^3y + 2x + y^3 = C.$$

**2280.**  $(x + y)dx + (x + 2y)dy = 0.$

**2281.**  $(x^2 + y^2 + 2x)dx + 2xydy = 0.$

**2282.**  $(x^3 - 3xy^2 + 2)dx + (y^2 - 3x^2y)dy.$

**2283.**  $(xdx + ydy)(x^2 + y^2) = xdy - ydx.$

**2284.**  $2xydx + (y^2 - 3x^2)dy = 0.$

**2285.**  $(4x^2 - y^2)dx + 2xydy = 0.$

**2286.**  $3x^2e^ydx + (x^3e^y - 1)dy = 0.$

**2287.**  $e^{-y}dx + (1 - xe^{-y})dy = 0.$

**2288.**  $2x\cos^2 ydx + (2y - x^2\sin 2y)dy = 0.$

$$2289. (3x^2 + 2y)dx + (2x - 3)dy = 0.$$

$$2290. (x \cos 2y + 1)dx - x^2 \sin 2y dy = 0.$$

$$2291. (2x^3 - xy^2)dx + (2y^3 - x^2y)dy = 0.$$

$$2292. xdy = (y - x^2 - y^2)dx.$$

$$2293. e^y dx = (2y - xe^y) dy.$$

$$2294. yx^{y-1}dx + x^y \ln x dy = 0.$$

$$2295. (1 + x\sqrt{x^2 + y^2})dx + (\sqrt{x^2 + y^2} - 1)ydy = 0.$$

$$2296. \left( \frac{1}{x} + \frac{y}{\cos^2 xy} \right) dx + \left( \frac{x}{\cos^2 xy} + 2y \right) dy = 0.$$

$$2297. 3^{xy} y \ln 3 dx + (x3^{xy} \ln 3 - 3) dy = 0; \quad y(0) = 0.$$

$$2298. \left( x + e^{\frac{x}{y}} \right) dx + e^{\frac{x}{y}} \left( 1 - \frac{x}{y} \right) dy = 0; \quad y(0) = 0.$$

Розв'язати диференціальні рівняння першого порядку:

$$2299. y' x \ln \frac{x}{y} = y.$$

$$2300. 2xy^2 - y + xy' = 0.$$

$$2301. xy' + y = xy^2 \ln x.$$

$$2302. (1 - x^2)y' + xy = 2.$$

$$2303. x^2(y+1)dx + (x^3 - 1)(y-1)dy = 0.$$

$$2304. (1 + y^2)(e^{2x} dx - e^y dy) = (1 + y) dy.$$

$$2305. y' - y \frac{2x-1}{x^2} = 1.$$

$$2306. y' + y \cos x = \sin x \cos x.$$

$$2307. 2cx + \sqrt{\frac{x}{y}} dy - \sqrt{\frac{y}{x}} dx = 0.$$

$$2308. xy' = y^2 - y.$$

$$2309. (e^x + y^4) dy = (1 - ye^x) dx.$$

$$2310. e^{x-y} y' = 1; y = 1 \text{ при } x = 1.$$

$$2311. 2xyy' + x^2 - y^2 = 0; y = 0 \text{ при } x = 0.$$

$$2312. e^y (y' + 1) = 1; y = 0 \text{ при } x = 0.$$

$$2313. y - y' \cos x = y^2 \cos x (1 - \sin x).$$

$$2314. y' + \frac{2y}{x} = \frac{2\sqrt{y}}{\cos^2 s}.$$

$$2315. xy' - 4y = x^2 \sqrt{y}.$$

$$2316. x^3 dx + yx^2 dy = \sqrt{x^2 + y^2} (y dx - x dy).$$

$$2317. (x - 2y + 1) y' = 2x - y + 1.$$

$$2318. y' = \frac{(1+y)^2}{x(y+1) - x^2}.$$

### **6.3. Диференціальні рівняння другого та вищих порядків**

**Завдання** (для підготовки до практичних занять: 2319, 2335, 2337, 2339, 2341, 2343—2346, 2348; для аудиторних занять: 2334, 2335, 2337, 2339, 2341, 2343—2346, 2348; домашні: 2336, 2338, 2340, 2342, 2349—2351, 2353—2355; додаткові: 2347, 2352, 2356, 2358—2362).

*Закінchte вирази:*

**2319.** Диференціальні рівняння другого порядку, що допускають зниження порядку, мають вигляд: ...

**2320.** Рівняння виду  $y'' = f(x)$  розв'язується за допомогою ...

**2321.** Рівняння  $F(x, y', y'') = 0$ , що не містить  $y$  в явному вигляді, зводиться до рівняння першого порядку  $F(x, z, z') = 0$  заміною ...

**2322.** Рівняння  $F(y, y', y'') = 0$ , що не містить  $x$  в явному вигляді, зводиться до рівняння першого порядку заміною .... В такому разі  $y'' = \dots$ .

**2323.** Розв'язати рівняння:  $y'' = f(x)$ .

*Розв'язання.*

За методикою інтегрування диференціальних рівнянь з відокремлюваними змінними дістанемо:

$$\begin{aligned} y'' = f(x) &\Rightarrow \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dx} \right) = f(x) \Rightarrow d \left( \frac{dy}{dx} \right) = f(x) dx; \\ \int d \left( \frac{dy}{dx} \right) &= \int f(x) dx; \quad \frac{dy}{dx} = \int f(x) dx + C; \\ dy &= (\int f(x) dx + C_1) dx; \quad \int dy = \int (\int f(x) dx + C_1) dx; \\ y &= \int (\int f(x) dx) dx + C_1 x + C_2. \end{aligned}$$

**2324.** Знайти частинний розв'язок рівняння

$$y'' = \frac{1}{x^2}$$

з початковими умовами:

$$y(1) = 3; \quad y'(1) = 1.$$

*Розв'язання.*

$$\begin{aligned} y'' = \frac{1}{x^2}; \quad \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dx} \right) &= \frac{1}{x^2}; \quad d \left( \frac{dy}{dx} \right) = \frac{dx}{x^2}; \\ \int d \left( \frac{dy}{dx} \right) &= \int \frac{dx}{x^2}; \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x} + C_1; \\ dy &= \left( -\frac{1}{x} + C_1 \right) dx; \quad \int dy = \int \left( -\frac{1}{x} + C_1 \right) dx; \\ y &= -\ln|x| + C_1 x + C_2. \end{aligned}$$

Підставивши початкові умови у загальний розв'язок та його похідну:

$$y = -\ln|x| + C_1 x + C_2; \quad y' = -\frac{1}{x} + C_1,$$

дістанемо таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} 3 = -\ln 1 + C_1 + C_2 \\ 1 = -1 + C_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 2 \\ C_2 = 1. \end{cases}$$

Шуканий частинний розв'язок рівняння даного завдання має вигляд:

$$y = -\ln x + 2x + 1.$$

**2325.** Розв'язати рівняння

$$F(x, y', y'') = 0.$$

Інтегрування рівнянь другого порядку такого виду фактично зводиться до інтегрування системи двох рівнянь першого порядку:

$$\begin{cases} y' = z; \\ F(x, z, z') = 0. \end{cases}$$

**2326.** Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'' - y' \frac{1}{x} = 0.$$

*Розв'язання.*

$$y'' = \frac{y'}{x} \Rightarrow \begin{cases} y' = z; \\ z' - \frac{z}{x} = 0; \end{cases}$$

$$z' - \frac{z}{x} = 0; \quad \frac{dz}{dx} = \frac{z}{x}; \quad \frac{dz}{z} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{dz}{z} = \int \frac{dx}{x};$$

$$\ln|z| = \ln|x| + \ln|C_1|; \quad z = C_1 x.$$

$$y' = z \Rightarrow \frac{dy}{dx} = C_1 x; \quad dy = C_1 x dx;$$

$$\int dy = C_1 \int x dx.$$

Отже, загальний розв'язок такий:

$$y = C_1 \frac{x^2}{2} + C_2.$$

**2327.** Розв'язати рівняння

$$F(y, y', y'') = 0.$$

*Розв'язання.*

Формально це рівняння залежить від трьох змінних:  $y, y', y''$ . Вважатимемо, що  $y$  — незалежна змінна (аргумент), а  $y' = z$  — залежна змінна (функція), тоді:

$$y'' = \frac{d}{dx} y' = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot z.$$

Отже, рівняння другого порядку можна подати у вигляді системи двох рівнянь першого порядку, а саме:

$$\begin{cases} y' = z; \\ F\left(y, z, \frac{dz}{dy} z\right) = 0. \end{cases}$$

**2328.** Знайти загальний інтеграл рівняння

$$y'' \operatorname{tg} y = 2(y')^2.$$

*Розв'язання.*

Зробимо заміну:  $y' = z$ ;  $y'' = zz'_y$ , тоді

$$y'' \operatorname{tg} y = 2(y')^2 \Rightarrow \begin{cases} y' = z; \\ z \frac{dz}{dy} \operatorname{tg} y = 2z^2; \end{cases}$$

$$\frac{dz}{z} = 2 \operatorname{ctg} y \, dy; \quad \int \frac{dz}{z} = 2 \int \operatorname{ctg} y \, dy;$$

$$\ln|z| = 2 \ln|\sin y| + \ln C_1;$$

$$z = C_1 \sin^2 y; \quad y' = z \Rightarrow \frac{dy}{dx} = C_1 \sin^2 y,$$

$$\int \frac{dy}{\sin^2 y} = C_1 \int dx; \quad -\operatorname{ctg} y = C_1 x + C_2.$$

Загальний інтеграл розв'язуваного рівняння такий:

$$\operatorname{ctg} y + C_1 x + C_2 = 0.$$

*Розв'язати рівняння:*

**2329.**  $y'' = \cos x$ ; при  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $y' = 0$ .

**2330.**  $y''' = 6x$ ; при  $x = 0$ ,  $y = 1$ ,  $y' = 0$ ,  $y'' = 0$ .

**2331.**  $y'' = x \sin x$ .

**2332.**  $y'' = 4e^{2x}$ ;  $y = 1$ ,  $y' = 2$  при  $x = 0$ .

**2333.**  $y'' - y' = x$ .

**2334.**  $xy'' - y' = 2x$ .

**2335.**  $xy'' - 2y' = \frac{1}{x}$ .

**2336.**  $y'' + y' \operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg} x$ .

$$2337. xy'' + y' = 1; y = 0, y' = 1, x = 1.$$

$$2338. y'' - y = 0.$$

$$2339. y'' + y = 0.$$

$$2340. y'' + 2y' + y = 0.$$

$$2341. y'' - 2y^3 = 0; y = 1, y' = 1 \text{ при } x = -1.$$

$$2342. y'' - y + 2y^3 = 0; y = 1, y = 0 \text{ при } x = 0.$$

Знайти загальні або частинні розв'язки диференціальних рівнянь:

$$2343. y'' = x + \sin x.$$

$$2344. y''' = e^{2x} + x^3.$$

$$2345. y'' = (x^2 + 3x + 1)e^x.$$

$$2346. (y'')^3 - 2y'' - x = 0.$$

$$2347. y''' = 2 \ln x + x + 2.$$

$$2348. y'' = 1 - (y')^2.$$

$$2349. 2yy'' - 3(y')^2 = 3y^2.$$

$$2350. xy'' = y' \ln \frac{y}{x}.$$

$$2351. x^2 y'' + xy' = 1.$$

$$2352. (y''')^2 + (y'')^2 = 1.$$

$$2353. y''(y-1) - 2(y')^2 = 0.$$

$$2354. xy'' - 3y' = -\frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$2355. (y'')^2 - y'y''' = \left(\frac{y'}{x}\right)^2.$$

$$2356. y''' + y'' \operatorname{tg} x = \sec x.$$

$$2357. y''(x^2 + 1) = 2xy'; y(0) = 1, y'(0) = 3.$$

$$2358. y'' - \frac{y'}{x-1} = x(x-1); y(0) = 0, y'(0) = 0.$$

$$2359. y'' \operatorname{ctg} x + y' = 2; y(0) = 0, y'(0) = 2.$$

$$2360. xy'' - 3y' = -\frac{x^5}{\sqrt{\rho - x^2}}; y(3) = 0, y'(3) = 0.$$

$$2361. x^4 y'' - (y - xy')^3 = 0; y(1) = 1, y'(1) = 1.$$

$$2362. y'' = 2 - y; y(0) = 2, y'(0) = 2.$$

#### **6.4. Загальні поняття лінійних диференціальних рівнянь другого та вищих порядків**

**Завдання** (для підготовки до практичних занять: 2363—2379, 2385; для аудиторних занять: 2380, 2382, 2386—2389; домашні: 2381, 2383, 2390, 2392; додаткові: 2384, 2393, 2394).

*Закінчте вирази:*

**2363.** Лінійним диференціальним рівнянням  $n$ -го порядку називається рівняння ...

**2364.** Однорідним лінійним диференціальним рівнянням  $n$ -го порядку називається рівняння ...

**2365.** Неоднорідним лінійним диференціальним рівнянням  $n$ -го порядку називається рівняння ...

**2366.** Лінійним диференціальним рівнянням другого порядку називається рівняння ...

**2367.** Частинний розв'язок лінійного однорідного рівняння має вигляд: ...

**2368.** Сукупність будь-яких  $n$  лінійно незалежних частинних розв'язків однорідного лінійного диференціального рівняння  $n$ -го порядку називається ...

**2369.** Загальний розв'язок неоднорідного лінійного диференціального рівняння можна подати у вигляді ...

**2370.** Вронськіаном називається визначник ...

**2371.** Формула Ліувілля—Остроградського має вигляд: ...

**2372.** Розв'язки однорідного лінійного диференціального рівняння  $n$ -го порядку називаються лінійно незалежними на проміжку  $I$ , якщо ...

**2373.** Розв'язки однорідного лінійного диференціального рівняння  $n$ -го порядку називаються лінійно залежними на проміжку  $I$ , якщо ...

**2374.** Якщо відома фундаментальна система розв'язків  $y_i(x) (i=1, \dots, n)$  однорідного диференціального рівняння, то загальний розв'язок відповідного неоднорідного рівняння знаходиться за формулою: ...

**2375.** Для того щоб розв'язки  $y_1(x)$  та  $y_2(x)$  однорідного лінійного диференціального рівняння були лінійно незалежними, необхідно і достатньо, щоб вронськіан  $W(y_1, y_2)$  ...

**2376.** Методом варіації довільних сталих або методом Лагранжа називається ...

**2377.** Якщо  $y_1(x)$  і  $y_2(x)$  — лінійно незалежні розв'язки лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку, то загальний розв'язок цього рівняння має вигляд: ...

**2378.** Знаходження загального розв'язку рівняння

$$y'' + \frac{1}{x} y' - \frac{1}{x^2} y = 0.$$

*Розв'язання.*

Методом добору з наступною перевіркою можна встановити, що

$$y_1(x) = x; \quad y_2(x) = \frac{1}{x}$$

будуть розв'язками цього рівняння. Обчислимо визначник Вронського для цих функцій:

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & \frac{1}{x} \\ 1 & -\frac{1}{x^2} \end{vmatrix} = -\frac{2}{x^2} \neq 0.$$

Отже,

$$W(y_1, y_2) \neq 0,$$

а тому розв'язки  $y_1(x) = x$  та  $y_2 = \frac{1}{x}$  лінійно незалежні і загальним розв'язком рівняння є

$$y = C_1 x + C_2 \frac{1}{x}.$$

Дослідити лінійну залежність таких систем функцій:

**2379.**  $x^2$ ;  $x^2 + x$ .

*Розв'язання.*

Обчислимо визначник Вронського для функцій  $y_1 = x^2$  та  $y_2 = x^2 + x$ :

$$\begin{aligned} W[y_1, y_2] &= \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^2 & x^2 + x \\ (x^2)' & (x^2 + x)' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^2 & x^2 + x \\ 2x & 2x + 1 \end{vmatrix} = \\ &= x^2(2x + 1) - 2x(x^2 + x) = 2x^3 + x^2 - 2x^3 - 2x^2 = -x^2 \neq 0 \quad \text{при } x \neq 0. \end{aligned}$$

Отже, система функцій  $x^2$ ;  $x^2 + x$  лінійно незалежна.

**2380.**  $\ln x$ ;  $x$ .

**2381.**  $\sin x$ ;  $\cos x$ .

**2382.**  $x^2 + 3x$ ;  $x^2 - 1$ ;  $x + 3$ .

**2383.**  $\ln x^4$ ;  $\ln 5x$ ;  $11$ .

**2384.**  $x$ ;  $-3x$ ;  $2x$ .

Розв'язати лінійні рівняння, якщо відомий один із частинних розв'язків:

**2385.**  $y'' + \frac{y'}{x} - \frac{y}{x^2} = 0$ ;  $y_1(x) = \frac{1}{x}$ .

*Розв'язання.* Відомо, що коли  $y_1(x) \neq 0$  — нетривіальний розв'язок лінійного однорідного рівняння другого порядку

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0,$$

де  $p(x)$ ,  $q(x)$  — неперервні функції при  $x \in (a; b)$ , то загальний розв'язок рівняння можна знайти за формулою Абеля:

$$y = C_1 y_1 \int \frac{e^{-\int p(x) dx}}{y_1^2(x)} dx + C_2 y_1(x).$$

Отже, в даному разі

$$y_1(x) = \frac{1}{x}; \quad p(x) = \frac{1}{x}.$$

Підставляючи ці вирази в формулу Абеля, дістанемо:

$$\begin{aligned} y &= C_1 \frac{1}{x} \int \frac{e^{-\int \frac{1}{x} dx}}{\frac{1}{x^2}} dx + C_2 \frac{1}{x} \Rightarrow \\ &\Rightarrow y = C_1 \frac{1}{x} \int \frac{e^{-\ln x}}{\frac{1}{x^2}} dx + \frac{C_2}{x} \Rightarrow \\ &\Rightarrow y = C_1 \frac{1}{x} \int x^2 \cdot x^{-1} dx + \frac{C_2}{x} \Rightarrow \\ &\Rightarrow y = C_1 \frac{1}{x} \frac{x^2}{2} + \frac{C_2}{x} = C_1 x + \frac{C_2}{x}. \end{aligned}$$

$$2386. y'' + \frac{x \operatorname{tg} x}{x - \operatorname{tg} x} y' + \frac{\operatorname{tg} x}{x - \operatorname{tg} x} y = 0; \quad y_1(x) = \sin x.$$

$$2387. y'' + (2 \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x) y' + 2y \operatorname{tg}^2 x = 0; \quad y_1(x) = \cos^2 x.$$

$$2388. x^2(1 - \ln x) y'' + x y' - y = 0; \quad y_1(x) = x.$$

$$2389. y'' - \frac{2y}{x^2} = 0; \quad y_1(x) = \frac{1}{x}.$$

$$2390. (x^2 - 2x) y'' - (x^2 - 2) y' + 2(x - 1) y = 0; \quad y_1(x) = x^2.$$

$$2391. (2x + 1) y'' + (4x - 2) y' - 8y = 0; \quad y_1(x) = e^{-2x}.$$

$$2392. x(1 - x)^2 y'' - 2y = 0; \quad y_1(x) = \frac{x}{1 - x}.$$

$$2393. y'' - \frac{6y}{x^2} = 0; \quad y_1(x) = x^2.$$

$$2394. xy'' + 2y' + x = 0; \quad y_1(x) = \frac{\sin x}{x}.$$

### **6.5. Однорідні лінійні диференціальні рівняння другого та вищих порядків зі сталими коефіцієнтами**

**Завдання** (для підготовки до практичних занять: 2395—2407, 2408, 2422, 2431; для аудиторних занять: 2409—2415, 2423—2425, 2429, 2434; домашні: 2416—2420, 2426—2428, 2430, 2436; додаткові: 2437—2440, 2441—2445).

*Закінchte вирази:*

**2395.** Однорідне лінійне диференціальне рівняння  $n$ -го порядку зі сталими коефіцієнтами має вигляд: ...

**2396.** Однорідне лінійне диференціальне рівняння другого порядку має вигляд: ...

**2397.** Для того щоб розв'язати лінійне однорідне диференціальне рівняння  $n$ -го порядку, підставляємо  $y = \dots$

**2398.** Характеристичним рівнянням для лінійного однорідного диференціального рівняння  $n$ -го порядку називається рівняння ...

**2399.** Якщо характеристичне рівняння має  $n$  різних коренів, то загальний інтеграл відповідного однорідного лінійного диференціального рівняння  $n$ -го порядку подається у вигляді: ...

**2400.** Якщо характеристичне рівняння має два різних дійсних корені, то загальний інтеграл відповідного однорідного лінійного диференціального рівняння другого порядку подається у вигляді: ...

**2401.** Якщо серед коренів характеристичного рівняння  $n$ -го порядку є  $k_1$  однакових, то загальний розв'язок однорідного лінійного диференціального рівняння  $n$ -го порядку подається у вигляді: ...

**2402.** Якщо корені характеристичного рівняння другого порядку однакові, то загальний розв'язок однорідного лінійного диференціального рівняння 2-го порядку подається у вигляді: ...

**2403.** Якщо серед коренів характеристичного рівняння  $n$ -го порядку є комплексні корені, то загальний розв'язок відповідного однорідного лінійного диференціального рівняння подається у вигляді: ... Якщо ж корені характеристичного рівняння другого порядку комплексно спряжені, то загальний розв'язок однорідного лінійного диференціального рівняння подається у вигляді: ...

**2404.** Розв'язати рівняння

$$y'' + py' + qy = 0, \text{ якщо } p = \text{const}, q = \text{const}.$$

*Розв'язання.*

Наслідуючи Ейлера, розв'язок даного рівняння шукаємо у вигляді:  $y = e^{\lambda x}$ . Підставивши цю функцію у рівняння, дістанемо рівняння, яке називають характеристичним:

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0.$$

Залежно від дискримінанта  $D$  будуються розв'язки диференціального рівняння. Розглянемо можливі випадки:

$$1. D > 0: \lambda_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{D}}{2}.$$

Отже, загальний розв'язок рівняння має вигляд:

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}.$$

$$2. D = 0: \lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{p}{2}.$$

В такому разі загальний розв'язок рівняння буде мати вигляд:

$$y = e^{\lambda x} (C_1 + C_2 x).$$

$$3. D < 0: \lambda_{1,2} = -\frac{p}{2} + i\sqrt{|D|} \equiv \alpha + i\beta,$$

$$\text{де } \alpha = -\frac{p}{2}, \quad \beta = \sqrt{|D|}.$$

Отже, загальний розв'язок рівняння має вигляд:

$$y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x).$$

**2405.** Знаходження загального розв'язку рівняння

$$y'' + 2y' + 5y = 0.$$

*Розв'язання.*

Підставляючи у дане рівняння  $y = e^{\lambda x}$ , дістанемо таке характеристичне рівняння:

$$\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0.$$

Його дискримінант ( $D = 4 - 20 = -16$ ) від'ємний, тому корені цього рівняння комплексно-спряжені і мають вигляд:

$$\lambda_{1,2} = -1 \pm \sqrt{-16} = -1 \pm i4;$$

$$\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -1; \\ \beta = 4. \end{cases}$$

Загальний розв'язок рівняння буде таким:

$$y = e^{-x} (C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x).$$

**2406.** Знаходження частинного розв'язку, що задовольняє початкові умови  $y(0)=1$ ;  $y'(0)=1$  для рівняння

$$y'' + 4y' + 4y = 0.$$

*Розв'язання.*

Складаємо відповідне характеристичне рівняння:

$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0; \quad D = 0.$$

Його дискримінант рівний нулю, а отже, корені рівняння однакові:  $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$ . Загальний розв'язок рівняння має вигляд:

$$y = e^{-2x} (C_1 + C_2 x).$$

Знайдемо його похідну:

$$y' = C_2 e^{-2x} - 2e^{-2x}(C_1 + C_2 x) \Rightarrow y' = e^{-2x}(c_2 - 2c_1 - 2c_2 x).$$

Підставивши початкові умови у ці рівності, дістанемо систему рівнянь для знаходження значень довільних сталих:

$$\begin{cases} 1 = C_1; \\ 1 = C_2 - 2C_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 1; \\ C_2 = 3. \end{cases}$$

Отже, частинний розв'язок рівняння, що задовольняє дані початкові умови (задача Коші), буде таким:

$$y = e^{-2x}(1 + 3x).$$

**2407.** Знаходження загального розв'язку рівняння

$$y'' + 2y' - 3y = 0.$$

*Розв'язання.*

Побудуємо відповідне характеристичне рівняння:

$$\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0; \quad D = 16 > 0.$$

Корені цього рівняння дійсні та різні:

$$\lambda_1 = 3; \quad \lambda_2 = 1,$$

а тому його загальний розв'язок має вигляд:

$$y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^x.$$

Розв'язати однорідні диференціальні рівняння другого порядку:

**2408.**  $y'' - 3y' + 2y = 0.$

**2409.**  $y'' - y = 0.$

**2410.**  $y'' - 4y' + 3y = 0.$

**2411.**  $y'' - y' - 2y = 0.$

**2412.**  $y'' - 4y' = 0.$

**2413.**  $y'' - 9y = 0.$

**2414.**  $y'' + 6y' + 5y = 0.$

**2415.**  $y'' - 5y' + 4y = 0.$

**2416.**  $y'' + 2y' - 2y = 0.$

**2417.**  $y'' - 2y' - 3y = 0.$

**2418.**  $2y'' + 5y' + 2y = 0.$

**2419.**  $2y'' + y' - y = 0.$

**2420.**  $6y'' + 7y' + 2y = 0.$

**2421.**  $3y'' + 5y' - 2y = 0.$

**2422.**  $y'' - 2y' + y = 0.$

**2423.**  $y'' + 4y' + 4y = 0.$

**2424.**  $y'' + 2y' + y = 0.$

**2425.**  $4y'' - 12y' + 9y = 0.$

2426.  $y'' + 6y' + 9y = 0$ .

2427.  $4y'' + 4y' + y = 0$ .

2428.  $y'' + 8y' + 16y = 0$ .

2429.  $y'' + 4y = 0$ .

2430.  $y'' + y = 0$ .

2431.  $y'' + y' + y = 0$ .

2432.  $y'' + 2y' + 5y = 0$ .

2433.  $y'' - 2y' + 10y = 0$ .

2434.  $y'' + y = 0$ ;  $y' = 1$ ,  $y = 0$  при  $x = 0$ .

2435.  $y'' - y = 0$ ;  $y' = 0$ ,  $y = 1$  при  $x = 0$ .

2436.  $y'' - 2y' + y = 0$ ;  $y' = 1$ ,  $y = 0$  при  $x = 0$ .

2437.  $y'' - 3y' + 2y = 0$ ;  $y' = 1$ ,  $y = 0$  при  $x = 0$ .

2438.  $y'' + y' + y = 0$ ;  $y' = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$ ,  $y = 1$  при  $x = 0$ .

2439.  $y'' + 4y = 0$ ;  $y' = 2$ ,  $y = 1$  при  $x = 0$ .

2440.  $y'' + 4y' + 8y = 0$ ;  $y' = 0$ ,  $y = 1$  при  $x = 0$ .

Знайти загальні розв'язки рівнянь:

2441.  $y''' + 9y' = 0$ .

2442.  $y^{(IV)} - 13y'' + 36y = 0$ .

2443.  $y^{(IV)} = 8y'' - 16y$ .

2444.  $y''' - 13y' - 12y = 0$ .

2445.  $y^{(IV)} + 2y''' + y'' = 0$ .

**6.6. Неоднорідні лінійні диференціальні рівняння  
другого та вищих порядків зі сталими  
коефіцієнтами, права частина яких  
має спеціальний вигляд**

**Завдання** (для підготовки до практичних занять: 2446—2453, 2463; для аудиторних занять: 2458, 2468—2470, 2475—2478; домашні: 2471—2474, 2479—2488; додаткові: 2492—2495).

*Закінchte вирази:*

**2446.** Неоднорідне лінійне диференціальне рівняння  $n$ -го порядку зі сталими коефіцієнтами має вигляд: ...

**2447.** Неоднорідне лінійне диференціальне рівняння другого порядку має вигляд: ...

**2448.** Загальний розв'язок неоднорідного лінійного диференціального рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами має вигляд: ...

**2449.** Якщо права частина —  $f(x)$  неоднорідного лінійного диференціального рівняння другого порядку має вигляд  $f(x) = e^{ax} P_n(x)$ , де  $P_n(x)$  — многочлен степеня  $n$  та:

1)  $a$  — не корінь відповідного характеристичного рівняння, то частинний розв'язок  $y^*$  подається у вигляді: ...;

2)  $a$  — корінь відповідного характеристичного рівняння, то частинний розв'язок  $y^*$  подається у вигляді: ...;

3)  $a$  — корінь відповідного характеристичного рівняння, що має дійсні та однакові корені, то частинний розв'язок  $y^*$  подається у вигляді: ...

Якщо права частина —  $f(x)$  неоднорідного лінійного диференціального рівняння другого порядку має вигляд

$f(x) = e^{ax} (P_n(x) \cos bx + Q_m(x) \sin bx)$ , де  $P_n(x)$  і  $Q_m(x)$  — многочлени степенів  $n$  і  $m$  та:

1)  $a \pm ib$  — не корені відповідного характеристичного рівняння, то частинний розв'язок  $y^*$  подається у вигляді: ...;

2)  $a \pm ib$  — корені відповідного характеристичного рівняння, то частинний розв'язок  $y^*$  подається у вигляді: ....

**2450.** Знаходження частинного розв'язку рівняння  $y'' + py' + qy = f(x)$  у разі, якщо  $f(x)$  має спеціальний вигляд:

1.  $f(x) = e^{ax} P_n(x)$ ,  $P_n(x)$  — многочлен степеня  $n$ ;

2.  $f(x) = e^{ax} (P_n(x) \cos bx + Q_m(x) \sin bx)$ , де  $P_n(x)$ ,  $Q_m(x)$  — многочлени степенів  $n$  та  $m$ .

*Розв'язання.*

1. Нехай  $f(x) = e^{ax} P_n(x)$ , де  $P_n(x)$  — стандартний многочлен, тоді:

а) якщо  $a$  — не корінь характеристичного рівняння, то

$$y^* = e^{ax} S_n(x);$$

б) якщо  $a$  — один із коренів характеристичного рівняння, що має дійсні та різні корені, то:

$$y^* = xe^{ax} S_n(x);$$

в) якщо  $a$  — корінь характеристичного рівняння, що має дійсні та однакові корені, то:

$$y^* = x^2 a^{ax} S_n(x).$$

2. Нехай  $f(x) = e^{ax} (P_n(x) \cos bx + Q_m(x) \sin bx)$ , де  $P_n(x)$  та  $Q_m(x)$  — многочлени степенів  $n$  та  $m$ , тоді:

а) якщо  $a \pm ib$  — не корені характеристичного рівняння, то:

$$y^* = e^{ax} (S_k(x) \cos bx + T_k(x) \sin bx);$$

б) якщо  $a \pm ib$  — корені характеристичного рівняння, то:

$$y^* = xe^{ax} (S_k(x) \cos bx + T_k(x) \sin bx),$$

де  $S_k(x)$ ,  $T_k(x)$ ,  $k = \max(n, m)$  — многочлени, коефіцієнти яких знаходять із умови, що частинний розв'язок  $y^*$  задовольняє рівняння з відповідною правою частиною.

**2451.** Знаходження загального розв'язку рівняння

$$y'' + y = e^{2x} (x + 1).$$

*Розв'язання.*

Запишемо відповідне однорідне рівняння:

$$y'' + y = 0$$

та складемо його характеристичне рівняння:

$$\lambda^2 + 1 = 0,$$

коренями якого є  $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i = 0 \pm 1i$ .

Отже, загальний розв'язок однорідного рівняння при  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 1$  має вигляд:

$$\bar{y} = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Із вигляду правої частини  $f(x) = e^{2x}(x+1)$  встановлюємо, що  $a = 1$ ,  $P_1(x) = x + 1$ , та впевнюємося, що  $a = 2$  не буде коренем характеристичного рівняння.

Отже, частинний розв'язок слід шукати за формулою у вигляді

$$y^* = e^{2x} (Ax + B),$$

де многочлен  $S_1(x) = Ax + B$  такого ж степеня, що і многочлен  $P_1(x) = x + 1$ , але із невизначеними коефіцієнтами. Для визначення коефіцієнтів  $A$  та  $B$  підставимо цей розв'язок у рівняння і зведемо подібні члени:

$$e^{2x}(4Ax + 4B + 4A) + e^{2x}(Ax + B) = e^{2x}(x + 1).$$

Дістанемо:

$$5Ax + 5B + 4A = x + 1.$$

Із рівності цих многочленів складемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x^1 | 5A = 1; \\ x^0 | 5B + 4A = 1. \end{cases}$$

Розв'язавши її, знайдемо, що  $A = \frac{1}{5}$ ;  $B = \frac{1}{25}$ . Отже, частинний розв'язок рівняння має вигляд:

$$y^* = e^{2x} \left( \frac{x}{5} + \frac{1}{25} \right).$$

Загальний розв'язок рівняння буде таким:

$$y = \bar{y} + y^* = C_1 \cos x + C_2 \sin x + e^{2x} \left( \frac{x}{5} + \frac{1}{25} \right).$$

**2452.** Знаходження загального розв'язку рівняння

$$y'' + 2y' + 2y = e^x \sin x.$$

*Розв'язання.*

Відповідне однорідне рівняння

$$y'' + 2y' + 2y = 0$$

має таке характеристичне рівняння:

$$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0.$$

Його коренями є  $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta = 1 \pm i$ , а отже, загальний розв'язок однорідного рівняння такий:

$$\bar{y} = e^x (C_1 \cos x + C_2 \sin x).$$

Із вигляду правої частини  $f(x) = e^x \sin x$  знаходимо, що  $a = 1$ ;  $b = 1$ ;  $P = 0$ ;  $Q = 1$ . У цьому разі коренями характеристичного

рівняння будуть  $a \pm bi = 1 \pm i$ , а тому частинний розв'язок  $y^*$  шукаємо за формулою:

$$y^* = xe^x (A \cos x + B \sin x).$$

Для знаходження невизначених коефіцієнтів  $A$  та  $B$  підставляємо у неоднорідне рівняння розв'язок  $y^*$  і дістаємо таку рівність:

$$\begin{aligned} & e^x ((2Bx + 2A + 2B) \cos x + (-2Ax + 2B - 2A) \sin x) - \\ & - 2e^x ((Ax + Bx + A) \cos x + (Bx - Ax + B) \sin x) + \\ & + 2xe^x (A \cos x + B \sin x) = e^x \sin x. \end{aligned}$$

Після скорочення на  $e^x \neq 0$  та зведення подібних членів прирівнюємо коефіцієнти при однакових тригонометричних функціях у лівій та правій частинах цієї рівності. Тоді дістанемо таку систему рівнянь:

$$\left. \begin{array}{l} \cos x \\ \sin x \end{array} \right| \begin{array}{l} 2B = 0; \\ -2A = 1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} B = 0; \\ A = -\frac{1}{2} \end{array}.$$

Отже, частинний розв'язок неоднорідного рівняння буде таким:

$$y^* = xe^x \left( -\frac{1}{2} \cos x \right),$$

а загальний розв'язок набуде вигляду:

$$y = \bar{y} + y^* = e^x (C_1 \cos x + C_2 \sin x) - \frac{x}{2} e^x \cos x.$$

### 2453. Знаходження частинного розв'язку рівняння

$$y'' - 2y' + y = e^x (2x + 1).$$

*Розв'язання.*

Складаємо характеристичне рівняння для відповідного даному однорідного рівняння:

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0, \text{ звідки } \lambda_1 = \lambda_2 = 1.$$

За виглядом правої частини неоднорідного рівняння  $f(x) = e^x (2x + 1)$  встановлюємо, що  $a = 1$ ,  $P_1(x) = 2x + 1$  — многочлен першого порядку. Зауважимо, що  $a = 1$  збігається з обома коре-

нями характеристичного рівняння, тому частинний розв'язок треба шукати у вигляді

$$y^* = x^2 e^x (Ax + B).$$

Після підстановки цього розв'язку у неоднорідне рівняння дістанемо таку рівність:

$$\begin{aligned} & e^x (Ax^3 + 6Ax^2 + Bx^2 + 4Bx + 6Ax + 2B) - \\ & - 2e^x (Ax^3 + Bx^2 + 3Ax^2 + 2Bx) + \\ & + e^x (Ax^3 + Bx^2) = e^x (2x + 1). \end{aligned}$$

Після скорочення на  $e^x \neq 0$  та зведення подібних членів маємо рівність таких многочленів:

$$x(6B + 6A) + 2B = 2x + 1 \Rightarrow \begin{cases} 6B + 6A = 2; \\ 2B = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = \frac{1}{2}; \\ A = -\frac{1}{6}. \end{cases}$$

Отже, частинний розв'язок даного рівняння має вигляд:

$$y^* = x^2 e^x \left( -\frac{x}{6} + \frac{1}{2} \right).$$

Знайти частинні розв'язки лінійних диференціальних рівнянь:

**2454.**  $y'' + y = x^3 + x + 3.$

**2455.**  $y'' + y' + y = 2x - 1.$

**2456.**  $y'' - y = 2 - x^2 - 2x.$

**2457.**  $y'' + y' = 3x^2 - 6.$

**2458.**  $y'' - 2y' = -2x + 2.$

**2459.**  $y'' = x^2.$

**2460.**  $y'' - y' + 2y = 2x^3 - 3x^2 + 6x.$

**2461.**  $y'' + 2y' + y = x^2 + 6x + 7.$

Знайти структуру частинних розв'язків рівнянь:

**2462.**  $y'' + 6y' + 10y = e^{-3x}.$

**2463.**  $y'' + 10y' + 25y = \cos 5x.$

**2464.**  $y'' + 9y = e^{-3x}.$

**2465.**  $y'' + 2y' = x \cos 2x.$

**2466.**  $y'' + 10y' + 26y = x e^{-5x}.$

**2467.**  $y'' + 6y' - 7y = 3e^{2x} + x^2.$

**2468.**  $y'' + 16y = x e^{4x}.$

**2469.**  $y'' + 16y = x \sin 4x.$

**2470.**  $y'' - 8y' + 16y = 3x e^{4x}.$

Знайти загальні розв'язки рівнянь:

2471.  $y'' + 4y = 8x^2$ .

2472.  $y'' - y = 2x - x^2$ .

2473.  $y'' + 2y' = 4x + 6$ .

2474.  $y'' + y' = x$ .

2475.  $y'' = x$ .

2476.  $y'' - 3y' + 2y = 4x - 6$ .

2477.  $y'' + 2y' + 2y = 2x^2 + 4x + 2$ .

2478.  $y'' + 2y' + y = x^2 + 6x + 6$ .

2479.  $y'' + y' = e^x(2x + 3)$ .

2480.  $y'' - y' = e^x(4x + 2)$ .

2481.  $y'' + 2y' + y = e^{-x}(x + 1)$ .

2482.  $y'' - 2y' + y = e^x(6x + 6)$ .

2483.  $y'' - 3y' + 2y = 2x^2 - 6x + 2 - e^x$ .

2484.  $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}(6x + 2)$ .

2485.  $y'' + y' - 2y = e^{-2x}$ .

2486.  $y'' + 2y = 2 \cos x$ .

2487.  $y'' - y = 2 \cos x + 2 \sin x$ .

2488.  $y'' - 2y' + y = -3 \cos 2x - 2 \sin 2x$ .

2489.  $y'' + y = \sin x$ .

2490.  $y'' + 4y = \cos 2x$ .

2491.  $y'' + y' = e^x(\cos x + \sin x)$ .

2492.  $y'' + y = e^x(4 \cos 2x - 2 \sin 2x)$ .

2493.  $y'' - 4y = e^{2x}(4 \cos x - \sin x)$ .

2494.  $y'' + 2y' + 2y = e^{-x}(2 \cos x - 2 \sin x)$ .

2495.  $y'' + 2y' + 2y = e^x(6 \cos x + 2 \sin x)$ .

## 6.7. Метод варіації довільних сталих

**Завдання** (для підготовки до практичних занять: 2496—2499; для аудиторних занять: 2501, 2505—2509; домашні: 2502, 2504, 2510—2515; додаткові: 2516, 2517).

**2496.** У яких випадках, розв'язуючи неоднорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами, застосовують метод варіації довільних сталих?

**2497.** Наведіть алгоритм методу варіації довільних сталих.

**2498.** Розв'язання рівняння

$$y'' + py' + qy = f(x)$$

методом варіації довільних сталих.

1. Нехай загальний розв'язок однорідного рівняння  $y'' + py' + qy = 0$  має вигляд

$$\bar{y} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x),$$

де  $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$  — лінійно незалежні розв'язки цього рівняння.

2. Вважаємо, що довільні сталі  $C_1$ ,  $C_2$  є функціями від  $x$ .

Тоді розв'язок неоднорідного рівняння  $y'' + py' + qy = f(x)$  шукаємо у вигляді

$$y = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x).$$

Знаходимо

$$y'(x) = C_1' y_1 + C_2' y_2 + C_1 y_1' + C_2 y_2'.$$

3. Оскільки невідомих змінних дві, а рівняння одне, то на ці функції потрібно накласти одну додаткову умову:

$$C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0.$$

Тоді

$$y' = C_1 y_1' + C_2 y_2';$$

$$y'' = C_1' y_1' + C_2' y_2' + C_1 y_1'' + C_2 y_2''.$$

4. Підставимо знайдені співвідношення у неоднорідне рівняння:

$$C_1' y_1' + C_2' y_2' + C_1 y_1'' + C_2 y_2'' + p(C_1 y_1' + C_2 y_2') + q(C_1 y_1 + C_2 y_2) = f(x).$$

5. Останнє рівняння набуває вигляду

$$C_1' y_1' + C_2' y_2' = f(x),$$

бо  $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$  — розв'язки однорідного рівняння, через що підкреслені члени дорівнюють нулю.

6. Для  $C_1'$  та  $C_2'$  маємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} C_1' y_1' + C_2' y_2' = 0; \\ C_1' y_1' + C_2' y_2' = f(x), \end{cases}$$

яка має єдиний розв'язок, бо її визначник не дорівнює нулю як визначник Вронського:

$$W_{(x)} = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0$$

для лінійно незалежних розв'язків  $y_1(x)$  та  $y_2(x)$ .

7. Після розв'язання системи рівнянь п. 6 невідомі функції  $C_1(x)$  та  $C_2(x)$  знаходять інтегруванням функцій  $C_1'(x)$  і  $C_2'(x)$ .

**2499.** Розв'язання диференціального рівняння

$$y'' + y = 0.$$

Його характеристичне рівняння

$$k^2 + 1 = 0$$

має корені  $k_{1,2} = \pm i$ .

Тоді загальним розв'язком цього рівняння є

$$\bar{y} = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Нехай функції  $C_1(x)$  та  $C_2(x)$  залежать від  $x$ .

Побудуємо систему рівнянь вигляду:

$$\begin{cases} C_1' \cos x + C_2' \sin x = 0; \\ -C_1' \sin x + C_2' \cos x = \operatorname{tg} x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dC_1}{dx} = \operatorname{tg} x \sin x; \\ \frac{dC_2}{dx} = \sin x \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \int dC_1 = \int (-\operatorname{tg} x \sin x) dx + \bar{C}_1; \\ \int dC_2 = \int \sin x dx + \bar{C}_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1(x) = \ln \left| \operatorname{ctg} \left( \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + \sin x + \bar{C}_1; \\ C_2(x) = \cos x + \bar{C}_2. \end{cases}$$

Отже, загальний розв'язок даного рівняння такий:

$$y = \left( \ln \left| \operatorname{ctg} \left( \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + \sin x + \bar{C}_1 \right) \cos x + (\cos x + \bar{C}_2) \sin x,$$

де  $\bar{C}_1$ ,  $\bar{C}_2$  — нові довільні сталі.

Розв'язати рівняння методом варіації довільних сталих:

**2500.**  $y'' + y = \operatorname{ctg} x.$

**2501.**  $y'' + y = \frac{1}{\sin x}.$

$$2502. y'' + y' = \frac{1}{1 + e^x}.$$

$$2504. y'' + 4y = \frac{1}{\sin^2 x}.$$

$$2506. y'' - y = \frac{e^x}{e^x + 1}.$$

$$2508. y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^2}.$$

$$2510. y'' + y = -\operatorname{ctg}^2 x.$$

$$2512. y'' + y = \frac{2}{\sin^2 x}.$$

$$2514. y'' + 4y' + 4y = e^{-2x} \ln x.$$

$$2516. y''' - 2y'' - y' + 2y = \frac{e^{2x}}{e^x + 1}.$$

$$2503. y'' + 4y' + 4y = e^{-2x} \ln x.$$

$$2505. y'' + y = \frac{1}{\sin x}.$$

$$2507. y'' + 2y' + 2y = \frac{e^x}{\cos x}.$$

$$2509. y'' + 4y' + 4y = \frac{e^{-2x}}{x^3}.$$

$$2511. y'' - y' = e^{2x} \sin(e^x).$$

$$2513. y'' + y = \frac{1}{\cos^3 x}.$$

$$2515. x^2 y'' - xy' = 3x^3.$$

$$2517. y^{(IV)} - y = xe^x + \cos x.$$

---



### 7.1. Основні поняття числових рядів

**Завдання** (для підготовки до практичних занять: 2518—2531, 2558; для аудиторних занять: 2532, 2534, 2543—2545, 2555, 2561, 2564; домашні: 2533, 2535, 2537, 2539—2542, 2559—2560, 2565; додаткові: 2536, 2546, 2562, 2568, 2569).

*Закінchte вирази:*

**2518.** Числовим рядом називається ...

**2519.** Залишком числового ряду називається ...

**2520.** Ряд називається розбіжним, якщо ...

**2521.** Усі члени розбіжного числового ряду домножили на те саме число, після чого ряд став збіжним. Цим числом може бути ...

**2522.** Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  називається ...

**2523.** Виберіть з понять: а) число; б) функція; в) символ; г) числова послідовність ті, які відповідають поняттю «числовий ряд».

**2524.** За означенням ряд буде збіжним, якщо:

а) границя його загального члена дорівнює нулю;

б) існує границя його частинних сум;

в) послідовність частинних сум ряду обмежена.

(Виберіть правильне із цих тверджень.)

**2525.** Виберіть з поданих далі умов ті, які будуть лише необхідними для збіжності ряду:

а) обмеженість будь-якого члена ряду;

б) границя загального члена ряду дорівнює нулю;

в) границя частинних сум ряду існує;

г) обмеженість частинних сум ряду.

**2526.** Виберіть з понять: а) число; б) функція; в) ряд; г) числова послідовність ті, що відповідають поняттю «частинні суми числового ряду:  $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$ ».

**2527.** Сформулюйте необхідну умову збіжності ряду.

**2528.** Збіжним чи розбіжним буде ряд, що є сумою таких рядів:

- а) двох збіжних;
- б) двох розбіжних;
- в) збіжного та розбіжного?

**2529.** Виберіть правильні з тверджень:

- а) якщо ряд збіжний, то границя його частинних сум існує;
- б) якщо ряд збіжний, то границя загального члена дорівнює нулю;
- в) якщо границя загального члена дорівнює нулю, то ряд збіжний;
- г) якщо границя загального члена ряду дорівнює одиниці, то про збіжність ряду нічого сказати не можна;
- д) якщо залишок ряду збіжний, то буде збіжним і сам ряд.

**2530.** Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{q^n}$  — збіжний при: а)  $q > 1$ ; б)  $|q| > 1$ ; в)  $|q| \geq 1$ ; г)  $q < 1$ . (Виберіть правильну відповідь.)

Запишіть три перші члени ряду, а також  $u_{n+1}$ :

**2531.**  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + n}$ .

**2532.**  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n + \sqrt{\ln^3 n}}$ .

**2533.**  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! + n}{n^n + n!}$ .

**2534.**  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + (-n)^n}{\sqrt{n(n+1)}}$ .

**2535.**  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{\pi}{n}\right)$ .

**2536.**  $\sum_{n=1}^{\infty} \arctg(-1)^n$ .

**2537.**  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n^2+n}{2}} n}{2^n}$ .

Запишіть найпростішу формулу  $n$ -го члена ряду та перевірте виконання необхідної умови збіжності ряду.

**2538.**  $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots$

**2539.**  $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \dots$

$$2540. \frac{3}{4} + \frac{4}{9} + \frac{5}{16} + \frac{6}{25} + \dots$$

$$2541. \frac{5}{2} + \frac{8}{4} + \frac{11}{8} + \frac{14}{16} + \dots$$

$$2542. 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

$$2543. \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \dots$$

$$2544. 1 - \frac{1}{2} + 3 - \frac{1}{4} + 5 - \frac{1}{6} + \dots$$

$$2545. \frac{\cos \alpha}{1} + \frac{\cos 2\alpha}{2} + \frac{\cos 3\alpha}{3} + \dots$$

$$2546. \arcsin 1 + \arcsin \frac{1}{2} + \arcsin \frac{1}{3} + \dots$$

Перевірте виконання необхідної умови збіжності рядів:

$$2547. 1 - 1 + 1 - 1 + \dots + (-1)^{n+1} + \dots$$

$$2548. \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{n^2 + 1} + \dots$$

$$2549. \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \dots + \frac{n}{n+1} + \dots$$

$$2550. 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \dots$$

$$2551. 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2n-1}} + \dots$$

$$2552. \frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} + \dots + \frac{1}{\ln(n+1)} + \dots$$

$$2553. 1 + \frac{2}{4} + \frac{4}{9} + \dots + \frac{2^{n-1}}{n^2} + \dots$$

$$2554. \frac{\ln 2}{1} + \frac{\ln 3}{2} + \dots + \frac{\ln(n+1)}{n} + \dots$$

$$2555. \sin 1 + \sin 2 + \dots + \sin n + \dots$$

$$2556. \sin \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{4} + \dots + \sin \frac{\pi}{2^n} + \dots$$

$$2557. \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n} - \sqrt{n-1}).$$

Дослідити збіжність рядів, користуючись безпосередньо означенням збіжності ряду. Знайти їх суми:

$$2558. \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots$$

*Розв'язання.*

Загальний член ряду, як правило, знаходять методом перебору варіантів, виходячи із аналізу заданих перших членів ряду з наступною перевіркою його правильності.

У даному прикладі чисельник кожного члена дорівнює одиниці, а знаменник є добутком трьох послідовних натуральних чисел. Будемо вважати, що  $u_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ . Тоді, беручи  $n$  таким, що послідовно дорівнює 1, 2, 3, ..., дістанемо члени ряду:

$$u_1 = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3}; \quad u_2 = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4}; \quad u_3 = \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5},$$

чим упевнюємося в тому, що загальний член ряду —  $u_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$  побудовано правильно.

За допомогою методу невизначених коефіцієнтів  $u_n$  можна розкласти на такі дробі:

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \left| \frac{A}{n(n+1)} + \frac{B}{(n+1)(n+2)} \right| = \\ &= \frac{1}{2n(n+1)} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)}. \end{aligned}$$

Часткова сума ряду  $S_n$  запишеться тоді так:

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4} - \dots - \frac{1}{n(n+1)} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right). \\ \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right) = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Отже, ряд збігається, його сума  $S = \frac{1}{4}$ .

**2559.**  $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots$

**2560.**  $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} + \dots$

$$2561. \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{2 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{n(n+3)} + \dots$$

$$2562. \frac{3}{4} + \frac{5}{36} + \dots + \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} + \dots$$

$$2563. \frac{1}{9} + \frac{2}{225} + \dots + \frac{n}{(2n-1)^2(2n+1)^2} + \dots$$

$$2564. \frac{5}{6} + \frac{13}{36} + \dots + \frac{3^n + 2^n}{6^n} + \dots$$

$$2565. 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}} + \dots$$

$$2566. \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}).$$

$$2567. \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}).$$

$$2568. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+5)}.$$

$$2569. \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{2n^2}.$$

## 7.2. Знакосталі ряди

**Завдання** (для підготовки до практичних занять: 2570—2580, 2591, 2618, 2631; для аудиторних занять: 2581—2583, 2582, 2608, 2623, 2635; домашні: 2584—2588, 2593—2607, 2612, 2621—2627, 2632—2634; додаткові: 2617, 2628—2630, 2637—2642).

*Закінchte вирази:*

**2570.** Необхідною і достатньою умовою збіжності ряду з додатними членами є ...

**2571.** Інтегральна ознака Коші щодо збіжності ряду формулюється так ...

**2572.** Сформулюйте ознаки порівняння збіжності числових рядів.

**2573.** Сформулюйте ознаку Даламбера стосовно збіжності числових рядів.

**2574.** Сформулюйте радикальну ознаку Коші щодо збіжності ряду.

**2575.** Узагальнений гармонічний ряд (ряд Діріхле)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$  буде збіжним, якщо: а)  $|p| > 1$ ; б)  $p > 1$ ; в)  $|p| \leq 1$ ; г)  $p < 1$ ; д)  $|p| = 1$ . (Виберіть правильну відповідь.)

**2576.** Виберіть правильні із тверджень:

а) якщо  $\int_1^{\infty} \sqrt{f(x)} dx = 1$ , то про збіжність ряду  $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{f(n)}$  нічого сказати не можна;

б) для дослідження збіжності ряду  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^2 + 1}$  достатньо використати ознаку порівняння рядів;

в) ознака Даламбера — це достатня ознака збіжності будь-якого числового ряду;

г) якщо домножити на будь-яке число збіжний залишок ряду, то сам ряд може бути як збіжним, так і розбіжним;

д) якщо частинні суми ряду із від'ємними членами обмежені, то ряд збіжний;

е) якщо послідовність частинних сум ряду монотонно зростає, то всі члени ряду додатні.

**2577.** Якщо за ознакою Даламбера ряд розбігається, то для цього ряду:

а) не виконується достатня умова збіжності;

б) не виконується необхідна умова збіжності;

в) необхідна умова збіжності може як виконуватись, так і не виконуватись. (Виберіть правильну відповідь.)

**2578.** Якою із ознак збіжності знакододатних рядів (Коші, Даламбера чи порівняння) доцільно скористатися, досліджуючи збіжності таких рядів:

а)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{3^n}$ ;      б)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{n^2 + 1}$ ;      в)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{\ln(n+1)}$ ;

г)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ ;      д)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n+1}{3n+1} \right)^{n^2}$ ;      е)  $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right)$ ;

є)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{4^n n!}$ ;      ж)  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ ;      з)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + 1}$ ?

За допомогою ознак порівняння дослідити збіжність рядів:

$$2579. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^2 n}.$$

*Розв'язання.*

Загальний член ряду  $u_n = \frac{1}{\ln^2 n} > 0$ , отже, ряд знакододатний і до нього можна застосувати ознаку порівняння. Використовуючи нерівність  $\ln n < n$ , дістанемо:

$$u_n = \frac{1}{\ln^2 n} > \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\ln n} = v_n.$$

Вибираємо ряд порівняння:  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ . Цей ряд розбіжний (доведіть), а тому за ознакою порівняння ряд  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^2 n}$  теж розбіжний.

$$2580. \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n+5}{n^3+10n+20}}.$$

*Розв'язання.*

Загальний член цього ряду  $u_n = \sqrt{\frac{n+5}{n^3+10n+20}} > 0$  являє собою алгебраїчний вираз. Для того, щоб цілеспрямовано вибрати ряд порівняння, побудуємо величину, еквівалентну  $u_n$  при  $n \rightarrow \infty$ :

$$u_n = \sqrt{\frac{n+5}{n^3+10n+20}} \sim \sqrt{\frac{n}{n^3}} = \frac{1}{n} = v_n.$$

Отже, як ряд порівняння вибираємо гармонічний ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ , він є розбіжним. Обчислюємо границю відношення  $\frac{u_n}{v_n}$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\frac{n+5}{n^3+10n+20}}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{(n+5)n^2}{n^3+10n+20}} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1 + \frac{5}{n}}{1 + \frac{10}{n^2} + \frac{20}{n^3}}} = 1 \quad (0 < 1 < \infty).$$

За ознакою порівняння буде розбіжним і ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n+5}{n^3+10n+20}}.$$

$$2581. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

$$2582. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)2^{2n-1}}.$$

$$2583. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+1)}.$$

$$2584. \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{2^n}.$$

$$2585. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{1+n^2}.$$

$$2586. \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{\pi}{4n}.$$

$$2587. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}.$$

$$2588. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2-4n+5}.$$

$$2589. \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n} - \sqrt{n+1}).$$

$$2590. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+2n}}.$$

$$2591. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{(n+1)\sqrt{n}}.$$

$$2592. \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1+n^2}{1+n^3} \right)^2.$$

$$2593. \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n}{n^4+1}}.$$

$$2594. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt[3]{n^4}}.$$

$$2595. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}.$$

$$2596. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{3^n+4^n}.$$

$$2597. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^3+2^n}.$$

$$2598. \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left( 1 + \frac{1}{n^2} \right).$$

$$2599. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}}{n}.$$

$$2600. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n+1}}{n}.$$

Дослідити збіжність рядів за допомогою ознаки Даламбера:

$$2601. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}.$$

*Розв'язання.*

Загальний член ряду є відношенням трансцендентних виразів:

$$u_n = \frac{3^n n!}{n^n} > 0 \text{ — ряд знакододастний.}$$

Виведемо формулу для  $(n+1)$ -го члена ряду:

$$u_{n+1} = \frac{3^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} = \frac{3 \cdot 3^n n!(n+1)}{(n+1)^n (n+1)} = \frac{3 \cdot 3^n \cdot n!}{(n+1)^n}.$$

Визначимо границю відношення  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \cdot 3^n \cdot n!}{(n+1)^n} \cdot \frac{n^n}{3^n \cdot n!} = \\ &= 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{3}{e} > 1. \end{aligned}$$

За ознакою Даламбера цей ряд розбіжний.

$$2602. \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{6}{27} + \frac{8}{81} + \dots$$

$$2603. 1 + \frac{2}{2!} + \frac{4}{3!} + \frac{8}{4!} + \dots$$

$$2604. 1 + \frac{1 \cdot 2}{1 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} + \dots$$

$$2605. \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{5}{\sqrt{18}} + \frac{9}{\sqrt{81}} + \frac{13}{\sqrt{324}} + \dots$$

$$2606. 1 + \frac{4}{2!} + \frac{9}{3!} + \frac{64}{4!} + \dots$$

$$2607. 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{7}} + \dots$$

$$2608. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n 2^n}{n!}.$$

$$2609. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3 + 1}.$$

$$2610. \sum_{n=1}^{\infty} n \operatorname{tg} \frac{\pi}{2^{n+1}}.$$

$$2611. \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \sin \frac{\pi}{2^n}.$$

$$2612. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}.$$

$$2613. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n^n}.$$

$$2614. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{2^n n!}.$$

$$2615. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n^2)^n}.$$

$$2616. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^n}{n^{n^2}}.$$

$$2617. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(\ln n)^n}.$$

Дослідити збіжність рядів за допомогою радикальної ознаки Коші:

$$2618. \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n}{3n+1} \right)^{2n}.$$

*Розв'язання.*

Загальний член ряду  $u_n = \left( \frac{n}{3n+1} \right)^{2n} > 0$ , отже, ряд знакододатний.

Визначимо границю:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left( \frac{n}{3n+1} \right)^{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{3n+1} \right)^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{3 + \frac{1}{n}} \right)^2 = \frac{1}{9} < 1.$$

За радикальною ознакою Коші даний ряд збіжний.

$$2619. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{2n^n}.$$

$$2620. \sum_{n=1}^{\infty} \arcsin^n \frac{1}{n}.$$

$$2621. \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2n+1}{3n+2} \right)^{\frac{n}{2}}.$$

$$2622. \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{5n-6}{4n+6} \right)^n.$$

$$2623. \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n^2+1}{n^2+2n+1} \right)^n.$$

$$2624. \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n+1}{n^2+1} \right)^{\sqrt{n}}.$$

$$2625. \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2n-1}{n^2+1} \right)^n.$$

$$2626. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^{2n}}{\ln^n n}.$$

$$2627. \sum_{n=1}^{\infty} \ln^n \left( \frac{n+1}{n} \right).$$

$$2628. \sum_{n=1}^{\infty} 3^n \left( \frac{n+2}{n+3} \right)^{n^2}.$$

$$2629. \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n^2-1}{n^2+1} \right)^{n^2}.$$

$$2630. \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n+1}{n} \right)^{n^2} \cdot 3^{-n}.$$

Дослідити збіжність ряду за допомогою інтегральної ознаки Коші:

$$2631. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n}.$$

*Розв'язання.*

Загальний член ряду

$$u_n = \frac{\ln n}{n} = f(n) > 0 \Rightarrow f(x) = \frac{\ln x}{x}.$$

Обчислимо інтеграл цієї функції:

$$\begin{aligned} \int_2^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_2^b \frac{\ln x}{x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_2^b \ln x \cdot d \ln x = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow +\infty} (\ln^2 x) \Big|_2^b = \frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow +\infty} (\ln^2 b - \ln^2 2) = +\infty. \end{aligned}$$

Інтеграл розбіжний, отже, за інтегральною ознакою Коші ряд теж розбіжний.

$$2632. 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{10} + \dots$$

$$2633. 1 + \frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{3\sqrt{5}} + \frac{1}{4\sqrt{7}} + \dots$$

$$2634. \frac{1}{8} + \frac{2}{27} + \frac{3}{64} + \frac{4}{125} + \dots$$

$$2635. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1) \ln^2(n+1)}.$$

$$2636. \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1+n}{1+n^2} \right)^2.$$

$$2637. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln \frac{n+1}{n-1}.$$

$$2638. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2-1}.$$

$$2639. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctg n}{n^2+1}.$$

$$2640. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^n}.$$

$$2641. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{e^{2n}+4}.$$

$$2642. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2+4n+n^2}}.$$

Дослідити збіжність рядів:

$$2643. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^3 5^n}.$$

$$2644. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! 3n}{(2n+1)!}.$$

$$2645. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n \ln \ln n}.$$

$$2646. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2 + n + 1}{(2n^2 + 3n + 2)^2}.$$

$$2647. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 + 4\sqrt{n}}{4\sqrt[n]{n^5} + \sqrt{n^5}}.$$

$$2648. \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \operatorname{tg} \frac{\pi}{n^2}.$$

$$2649. \sum_{n=1}^{\infty} n \sin^3 \frac{1}{n}.$$

$$2650. \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}^2 \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

$$2651. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \cos^2 n}{n}.$$

$$2652. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^3 n}.$$

$$2653. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{n + n!}.$$

$$2654. \sum_{n=1}^{\infty} \left( \sin \frac{1}{n} - \sin \frac{1}{n+1} \right).$$

$$2655. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n^2}}{(2n)!}.$$

$$2656. \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arcsin}^n \left( \frac{n-1}{n+1} \right).$$

$$2657. \sum_{n=1}^{\infty} \left( \ln \frac{3n}{2n+1} \right)^n.$$

$$2658. \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{3n-1}{3n+1} \right)^n.$$

$$2659. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n^2} \cdot 2^n}{(n+1)^{n^2}}.$$

$$2660. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 - n}}{n^2}.$$

$$2661. \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{\sqrt{n}}.$$

$$2662. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + 2n + 1}.$$

$$2663. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\operatorname{arctg} n (1 + n^2)}.$$

$$2664. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^4 + 1}}.$$

$$2665. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n (\ln^4 n + 1)}.$$

$$2666. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{2n} (n!)^3}{(3n)!}.$$

$$2667. \sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n^2 + 4}{n^2 + 3}.$$

$$2668. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{2^n + 3^n}.$$

$$2669. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(2^n)!}.$$

$$2670. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^n}{n^{n^2}}.$$

$$2671. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^n}{n^{n!}}.$$

$$2672. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\operatorname{arctg} n}}{n^2 + 1}.$$

$$2673. \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n+1}{n^2+1}}.$$

$$2674. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 2n}{n^2 + 1}.$$

### 7.3. Знакозмінні ряди

**Завдання** (для підготовки до практичних занять: 2675—2686, 2696, 2718; для аудиторних занять: 2693, 2695, 2711—2713, 2725, 2726; домашні: 2687—2692, 2701—2707, 2720—2724; додаткові: 2694, 2714—2717, 2725).

*Закінchte вирази:*

**2675.** Ряд називається знакозмінним, якщо ...

**2676.** Ряд називається знакопочерговим, якщо ...

**2677.** Ряд називається абсолютно збіжним, якщо ...

**2678.** Якщо ряд із абсолютних величин членів знакозмінного ряду збіжний, то сам знакозмінний ряд буде ...

**2679.** Ряд називається умовно збіжним, якщо ...

**2680.** Ознака Лейбніца для збіжності ряду формулюється так: ...

**2681.** Сформулюйте наслідки, що впливають із ознаки Лейбніца.

**2682.** Відомо, що послідовність парних частинних сум знакопочергового ряду має границю. Такий ряд буде:

а) збіжним;

б) розбіжним;

в) або збіжним, або розбіжним.

**2683.** Які з наведених нижче умов (або їх комбінацій) будуть достатніми, а які лише необхідними для збіжності знакопочергового ряду:

а) послідовність модулів членів ряду монотонно спадає;

б) границя загального члена дорівнює нулю;

в) ряд із абсолютних величин членів ряду збіжний;

г) обмеженість послідовності частинних сум?

**2684.** Які з даних властивостей зумовлюють абсолютну, а які — умовну збіжність знакозмінного ряду:

- а) монотонне спадання абсолютних величин членів ряду;
- б) компенсація додатних і від'ємних членів;
- в) рівність нулю границі загального члена ряду?

**2685.** Яку кількість членів ряду  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$  достатньо залишити за обчислення його суми, щоб похибка не перевищувала 0,01? Який знак матиме ця сума?

Дослідити збіжність рядів за допомогою ознаки Лейбніца:

**2686.**  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln n}{n}.$

*Розв'язання.*

Із вигляду загального члена ряду  $u_n = \frac{(-1)^n \ln n}{n}$  випливає, що даний ряд є знакопochерговим і до нього можна застосувати ознаку Лейбніца:

$$\begin{aligned} \text{а) } |u_n| > |u_{n+1}| &\Leftrightarrow \frac{\ln n}{n} > \frac{\ln(n+1)}{n+1} \Leftrightarrow (n+1) \ln n > n \ln(n+1) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \ln n > \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \Leftrightarrow n > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n. \end{aligned}$$

Остання нерівність виконується при  $n \geq 3$ , оскільки  $2 < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3$ .

$$\begin{aligned} \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} |u_n| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n} = \left| \begin{array}{l} n \rightarrow \infty \\ n \sim x \\ x \rightarrow +\infty \end{array} \right| = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = \left| \frac{\infty}{\infty} \right| = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0. \end{aligned}$$

Умови а) та б) ознаки Лейбніца виконуються, отже, даний ряд збіжний.

**2687.**  $1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{9} - \frac{1}{13} + \dots$

**2688.**  $1 - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{7}} + \dots$

$$2689. 1 - \frac{2}{7} + \frac{3}{13} - \frac{4}{19} + \dots$$

$$2690. 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \dots$$

$$2691. 2 - \frac{3}{2} + \frac{4}{3} - \frac{5}{4} + \dots$$

$$2692. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n (-1)^{n+1}}{n!}.$$

$$2693. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n}.$$

$$2694. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n \sqrt{n} - 1}.$$

$$2695. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n}{n^2 + 1}.$$

Дослідити збіжність знакозмінних рядів. У разі збіжності ряду дослідіть його на абсолютну та умовну збіжність:

$$2696. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}.$$

*Розв'язання.*

Загальний член ряду  $u_n = \frac{\sin n}{n^2}$  залежно від  $n$  може бути як додатним, так і від'ємним. Отже, ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$  — знакозмінний. Побудуємо ряд із абсолютних величин його членів:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n|}{n^2}$ . Цей ряд буде знакододатним  $\left(|u| = \frac{|\sin n|}{n^2} > 0\right)$ , так що для дослідження його на збіжність можна використати ознаки збіжності знакододатних рядів. Скористаємося ознакою порівняння рядів:

$$|u_n| = \frac{|\sin n|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2} = v_n \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} —$$

ряд порівняння. Він збігається, як ряд Діріхле, із  $p = 2 > 1$ . Отже, за ознакою порівняння ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n|}{n^2}$  збігається, а за теоремою Коші це означає, що збігається і ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$ , причому збігається абсолютно.

$$2697. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{tg} \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Розв'язання.

1. Із вигляду загального члена ряду  $u_n = (-1)^n \operatorname{tg} \frac{1}{\sqrt{n}}$  можна висновувати, що цей ряд знакопочерговий.

2. Дослідимо збіжність ряду із абсолютних величин членів даного ряду:

$$|u_n| = \operatorname{tg} \frac{1}{\sqrt{n}} > 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Одержаний ряд знакододатний. Застосуємо до нього ознаку порівняння:

$$|u_n| = \operatorname{tg} \frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n}} = v_n \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} —$$

ряд порівняння — розбіжний ряд Діріхле.

Отже, за ознакою порівняння ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{1}{\sqrt{n}}$  — розбіжний, а отже, ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{tg} \frac{1}{\sqrt{n}}$  абсолютно збіжним не буде.

3. Оскільки досліджуваний ряд є знакопочерговим, то перевіримо для нього виконання умов ознаки Лейбніца:

$$\text{а) } |u_n| > |u_{n+1}| \Leftrightarrow \operatorname{tg} \frac{1}{\sqrt{n}} > \operatorname{tg} \frac{1}{\sqrt{n+1}} — \text{виконується;}$$

$$\text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} |u_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{tg} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0 — \text{виконується.}$$

Отже, за ознакою Лейбніца даний ряд є збіжним, але його збіжність умовна.

$$2698. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}.$$

$$2699. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{3^n}.$$

$$2700. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{n^2 + 3n + 2}.$$

$$2701. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin n}{2n + 1}.$$

$$2702. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{tg} \frac{1}{n\sqrt{n}}.$$

$$2703. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\alpha)}{(\ln 10)^n}.$$

$$2704. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{2n+1}{3n+1} \right)^n.$$

$$2705. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^3}{2^n}.$$

$$2706. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3^n}{n!}.$$

$$2707. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n - \ln n}.$$

$$2708. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n^2+n}{2}} \cdot \frac{n^2}{4^n}.$$

$$2709. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^n}{3^n + 2^n}.$$

$$2710. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)}{n^3}.$$

$$2711. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{\pi n}{4}}{n^2 + \sin \frac{\pi n}{4}}.$$

$$2712. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

$$2713. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n^2]{n}}.$$

$$2714. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{n^2}}{n!}.$$

$$2715. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left( \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) \right)^n.$$

$$2716. \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{(2n-1)\pi}{4}.$$

$$2717. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n!}{n^n}.$$

2718. Для ряду  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$  оцініть похибку у разі заміни суми цього ряду сумою перших п'яти його членів.

Скільки членів ряду треба взяти, щоб обчислити його суму з точністю до  $\varepsilon$ ?

$$2719. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{5^n}; \quad \varepsilon = 0,001.$$

*Розв'язання.*

Вигляд загального члена ряду  $u_n = \frac{(-1)^n n}{5^n}$  показує, що даний ряд є знакопочерговим.

Перевіримо для нього виконання умов ознаки Лейбніца:

$$a) |u_n| > |u_{n+1}| \Leftrightarrow \frac{n}{5^n} > \frac{n+1}{5^{n+1}} \Leftrightarrow 5n > n+1 \text{ — виконується;}$$

$$б) \lim_{n \rightarrow \infty} |u_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{5^n} = \left| \begin{array}{l} n \rightarrow \infty \\ n \sim x \\ x \rightarrow +\infty \end{array} \right| = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{5^x} = \left| \frac{\infty}{\infty} \right| = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x)'}{(5^x)'} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x)'}{(5^x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{5^x \ln 5} = 0 \text{ — виконується.}$$

Отже, за ознакою Лейбніца даний ряд збіжний. Як наслідок із збіжності ряду за ознакою Лейбніца випливає, що похибка при обчисленні його суми за формулою  $S \approx S_n$  не перевищує за абсолютною величиною першого із відкинутих членів, тобто  $\varepsilon < |u_{n+1}|$ . Тому достатньо почергово обчислювати за абсолютною величиною члени ряду доти, поки не знайдемо такий його член, який буде за абсолютною величиною меншим, ніж  $\varepsilon = 0,001$ :

$$|u_1| = \frac{1}{5}; \quad |u_2| = \frac{2}{25}; \quad |u_3| = \frac{3}{125}; \quad |u_4| = \frac{4}{625};$$

$$|u_5| = \frac{1}{625}; \quad |u_6| = \frac{6}{625 \cdot 25} < 0,001.$$

Отже, достатньо залишити п'ять членів ряду.

2720.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2}{10^n}, \quad \varepsilon = 0,0001.$

2721.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n(n+1)}{n!}, \quad \varepsilon = 0,001.$

2722.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}, \quad \varepsilon = 0,001.$

2723.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}, \quad \varepsilon = 0,001.$

2724.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n (2n+1)!}, \quad \varepsilon = 0,001.$

2725.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^n}, \quad \varepsilon = 0,001.$

2726.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}, \quad \varepsilon = 0,001.$

## 7.4. Функціональні ряди. Степеневі ряди

**Завдання** (для підготовки до практичних занять: 2727—2739, 2762, 2806; для аудиторних занять: 2740—2742, 2763, 2773, 2775, 2810; домашні: 2743, 2745, 2782—2792, 2807, 2810; додаткові: 2746—2751, 2793—2805, 2809, 2812).

*Закінchte вирази:*

2727. Функціональним рядом називається ...

2728. Областю збіжності функціонального ряду називається ...

**2729.** Дослідження збіжності довільного функціонального ряду провадиться за методикою дослідження:

- а) знакододатного ряду;
- б) знаківд'ємного ряду;
- в) знакопочергового ряду;
- г) знакозмінного ряду. (Виберіть правильну відповідь.)

**2730.** Степеневим рядом називається ...

**2731.** Узагальненим степеневим рядом називається ...

**2732.** Сформулюйте теорему Абеля.

**2733.** Степеневий ряд буде збіжним при  $x = -3$ , якщо цей ряд:

- а) умовно збіжний при  $x = 4$ ;
- б) абсолютно збіжний при  $x = 3$ ;
- в) умовно збіжний при  $x = 3$ . (Виберіть правильну відповідь.)

**2734.** Радіусом збіжності степеневого ряду називається ...

**2735.** Формула знаходження радіуса збіжності степеневого ряду така: ...

**2736.** Степеневими рядами є:

|                                                     |                                               |                                                    |
|-----------------------------------------------------|-----------------------------------------------|----------------------------------------------------|
| а) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$ ;                  | б) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+7}}{n!}$ ; | в) $\sum_{n=1}^{\infty} x^{-2n} \sqrt{n}$ ;        |
| г) $\sum_{n=1}^{\infty} x^n \sin(nx)$ ;             | д) $\sum_{n=1}^{\infty} x^{2n} 3^{-n}$ ;      | е) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n^2 + 1}$ ; |
| є) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sin n) x^n}{n+1}$ ; | ж) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln^n x$ ;            | з) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{1-2n}}{n!}$ .     |

(Виберіть правильну відповідь.)

**2737.** Напишіть формулу знаходження радіуса збіжності (згідно з ознаками Даламбера і Коші) і встановіть, для яких із поданих нижче рядів її можна використати:

|                                                |                                                   |
|------------------------------------------------|---------------------------------------------------|
| а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^2+1}}{n}$ ; | б) $\sum_{n=1}^{\infty} x^{-n} 2^n$ ;             |
| в) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^{n+2}$ ;      | г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n+1} 2^n$ . |

**2738.** Степеневий ряд можна почленно диференціювати та інтегрувати на його ...

Знайти області збіжностей функціональних рядів:

**2739.**  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{(x-2)^n}$ .

Розв'язання.

Побудуємо ряд із абсолютних величин членів даного ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{|x-2|^n}.$$

Цей ряд знакододатний. Отже, можна застосувати до нього ознаку Даламбера (при цьому  $x$  будемо вважати за деякий параметр):

$$|u_n(x)| = \frac{\sqrt{n}}{|x-2|^n}; \quad |u_{n+1}(x)| = \frac{\sqrt{n+1}}{|x-2|^{n+1}};$$

$$\left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \frac{1}{|x-2|} \sqrt{\frac{n+1}{n}} = \frac{1}{|x-2|} \sqrt{1 + \frac{1}{n}};$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|x-2|} \sqrt{1 + \frac{1}{n}} = \frac{1}{|x-2|}.$$

За ознакою Даламбера цей ряд буде збігатись, якщо

$$\frac{1}{|x-2|} < 1 \Leftrightarrow |x-2| > 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 > 1 \\ x-2 > -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ x < 1, \end{cases}$$

і розбігатись, якщо:

$$\frac{1}{|x-2|} > 1 \Leftrightarrow 1 < |x-2| \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 < 1 \\ x-2 > -1 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x < 3.$$

Залишається дослідити ряд на збіжність у точках  $x=1$  і  $x=3$ .

При  $x=1$  маємо ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sqrt{n}$ , а при  $x=3$  — ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}$ . Ці ряди розбігаються, бо очевидно, що для них не виконується необхідна умова збіжності. Отже, областю збіжності функціонального ряду

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{|x-2|^n}$  буде  $x \in (-\infty; 1) \cup (3; \infty)$ . У цій області ряд збігається абсолютно.

**2740.**  $1 + e^{-x} + e^{-2x} + e^{-3x} + \dots$

**2741.**  $1 + x + x^2 + x^3 + \dots$

**2742.**  $\ln x + \ln^2 x + \ln^3 x + \dots$

**2743.**  $x + x^4 + \dots + x^{n^2} + \dots$

**2744.**  $x + \frac{x^2}{\sqrt{2}} + \frac{x^3}{\sqrt{3}} + \dots$

$$2745. 2x + 6x^2 + \dots + n(n+1)x^n + \dots$$

$$2746. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}.$$

$$2747. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{e^{nx}}.$$

$$2748. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}.$$

$$2749. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{x^n}.$$

$$2750. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{\ln x}}.$$

$$2751. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n! x^n}.$$

$$2752. \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{x}{3^n}.$$

$$2753. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)x^n}.$$

$$2754. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)^5 x^{2n}}.$$

$$2755. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n3^n(x-5)^n}.$$

$$2756. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{x^{n^n}}.$$

$$2757. \sum_{n=1}^{\infty} \left( x^n + \frac{1}{2^n x^n} \right).$$

$$2758. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n(n+1)}.$$

$$2759. \sum_{n=1}^{\infty} \ln^n(x^2 + 1).$$

$$2760. \sum_{n=1}^{\infty} 5^{n^2} x^{n^2}.$$

$$2761. \sum_{n=1}^{\infty} x^n \operatorname{tg} \frac{x}{2^n}.$$

Знайти області збіжностей степеневих рядів:

$$2762. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{5^n}.$$

*Розв'язання.*

Порівнюючи загальний член даного ряду  $u_n(x) = \frac{nx^n}{5^n}$  із загальним членом стандартного степеневого ряду  $a_n x^n$ , встановлюємо, що даний ряд є степеневим із коефіцієнтом  $a_n = \frac{n}{5^n}$ .

Знаходимо радіус збіжності ряду:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n5^{n+1}}{5^n(n+1)} = 5 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 5 \Rightarrow$$

$\Rightarrow (-5; 5)$  — інтервал збіжності ряду.

На кінцях інтервалу збіжності, тобто при  $x = \pm 5$ , маємо розбіжні ряди  $\sum_{n=1}^{\infty} n$  та  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n$ , для яких, як очевидно, не виконується необхідна умова збіжності. Отже,  $x \in (-5; 5)$  є областю збіжності даного степеневому ряду.

$$2763. 1 + \frac{x}{3 \cdot 2} + \frac{x^2}{3^2 \cdot 3} + \frac{x^3}{3^3 \cdot 4} + \dots$$

$$2764. 1 - \frac{x}{5\sqrt{2}} + \frac{x^2}{5^2\sqrt{3}} + \frac{8x^3}{5^3\sqrt{4}} + \dots + (-1)^n \frac{x^n}{5^n\sqrt{n+1}} + \dots$$

$$2765. 1 + \frac{2x}{3^2\sqrt{3}} + \frac{4x^2}{5^2\sqrt{3^2}} + \frac{8x^3}{7^2\sqrt{3^3}} + \dots + \frac{2^n x^n}{(2n+1)^2\sqrt{3^n}} + \dots$$

$$2766. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^n}{\sqrt{(3n-2)2^{2n}}}.$$

$$2767. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^n}{3^n + 7^n}.$$

$$2768. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n x^n}{6^{n^3}\sqrt{n}}.$$

$$2769. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n \sqrt{n} x^n}{4^n}.$$

$$2770. 1 + \frac{2x}{\sqrt{5} \cdot 5} + \frac{4x^2}{\sqrt{9} \cdot 5^2} + \frac{8x^3}{\sqrt{13} \cdot 5^3} + \dots$$

$$2771. 1 - \frac{x^2}{3 \cdot 2\sqrt{2}} + \frac{x^4}{3^2 \cdot 3\sqrt{3}} - \frac{x^6}{3^3 \cdot 4\sqrt{4}} + \dots$$

$$2772. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n x^n}{\sqrt{n}}.$$

$$2773. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n-1}}{2n-1}.$$

$$2774. (x+1) + \frac{(x+1)^2}{2 \cdot 4} + \frac{(x+1)^3}{3 \cdot 4^2} + \frac{(x+1)^4}{4 \cdot 4^3} + \dots$$

$$2775. \frac{2x-3}{1} - \frac{(2x-3)^2}{3} + \frac{(2x-3)^3}{5} - \dots$$

$$2776. \frac{x-1}{1 \cdot 2} + \frac{(x-1)^2}{3 \cdot 2^2} + \frac{(x-1)^3}{5 \cdot 2^3} + \dots$$

$$2777. \frac{2x+1}{1} + \frac{(2x+1)^2}{4} + \frac{(2x+1)^3}{7} + \dots$$

$$2778. \sum_{n=1}^{\infty} x^n.$$

$$2780. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1} x^{2n-1}}{(4n-3)^2}.$$

$$2782. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

$$2784. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}.$$

$$2786. \sum_{n=1}^{\infty} 3^{n^2} x^{n^2}.$$

$$2788. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n 3^n \ln n}.$$

$$2790. \sum_{n=1}^{\infty} n! x^{n!}.$$

$$2792. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^n}}{n^n}.$$

$$2794. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{n 9^n}.$$

$$2796. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^{2n-1}}{2n 4^n}.$$

$$2798. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{n^2}.$$

$$2800. \sum_{n=1}^{\infty} n^n (x+3)^n.$$

$$2779. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}.$$

$$2781. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^5 x^{2n}}{2n+1}.$$

$$2783. \sum_{n=1}^{\infty} n! x^n.$$

$$2785. \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n}{2n+1} \right)^{2n-1} x^n.$$

$$2787. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \left( \frac{x}{2} \right)^n.$$

$$2789. \sum_{n=1}^{\infty} x^{n!}.$$

$$2791. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{2^{n-1} n^n}.$$

$$2793. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! (x+3)^n}{n^n}.$$

$$2795. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^{2n}}{(n+1) \ln(n+1)}.$$

$$2797. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^{n^2}}{n^n}.$$

$$2799. \sum_{n=1}^{\infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^{n^2} (x-1)^n.$$

$$2801. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)^n (x+1)^n}{2^{n-1} n^n}.$$

$$2802. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! x^n}{n^n}.$$

$$2803. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt[3]{n+2}(x-2)^n}{n+1}.$$

$$2804. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)^{2n}(x-1)^n}{(3n-2)^{2n}}.$$

$$2805. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n-2)(x-3)^n}{(n+1)^2 2^{n+1}}.$$

Використовуючи почленне інтегрування та диференціювання, знайти суми рядів:

$$2806. x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots + \frac{x^n}{n} + \dots$$

*Розв'язання.*

Позначимо суму ряду через  $f(x)$  і знайдемо похідну  $f'(x)$ :

$$f'(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{n-1} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}.$$

Дістали ряд геометричної прогресії із знаменником  $q = x$  і першим членом  $u_1 = 1$ . Цей ряд буде збіжним при  $|x| < 1$ , а його сума визначається за формулою:

$$S(x) = \frac{1}{1-x} = f'(x).$$

Розв'язуючи це диференціальне рівняння, дістанемо:

$$f(x) = \int_0^x \frac{dx}{1-x} = -(\ln|1-x|)|_0^x = -\ln(1-x); \quad |x| < 1.$$

Зауважимо, що формула

$$x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^n}{n} + \dots = -\ln(1-x)$$

має місце на інтервалі збіжності  $x \in (-1; 1)$ .

$$2807. x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots$$

$$2808. x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \dots$$

$$2809. x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \dots$$

$$2810. 1 + 2x + 3x^2 + \dots + (n+1)x^n + \dots$$

$$2811. 1 - 3x^2 + 5x^4 - \dots + (-1)^{n-1}(2n-1)x^{2n-2} + \dots$$

$$2812. 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3x + 3 \cdot 4 \cdot x^2 + \dots + n(n+1)x^{n-1} + \dots$$

## 7.5. Розвинення функцій у степеневі ряди

**Завдання** (для підготовки до практичних занять: 2813—2816, 2848; для аудиторних занять: 2820, 2841, 2844 а), 2849, 2853, 2880; домашні: 2817—2819, 2827, 2839, 2844 б), 2850, 2860, 2881; додаткові: 2821—2826, 2836, 2845—2847, 2862—2869, 2882—2887).

*Закінchte вирази:*

**2813.** Розвинення функції  $f(x)$  в ряд Маклорена має вигляд: ...

**2814.** Розвинення функції  $f(x)$  в ряд Тейлора за степенями  $(x-c)$  має вигляд ...

**2815.** Розвинення функцій  $e^x$ ,  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $\ln(x+1)$ ,  $(1+x)^m$ ,  $\arctg x$  у ряд Маклорена такі ...

**2816.** Які з умов достатні, а які необхідні для розвинення функції  $f(x)$  у степеневий ряд на інтервалі збіжності?

- а) границя залишку ряду дорівнює нулю;
- б) обмеженість усіх похідних функції  $f(x)$ ;
- в) існування усіх похідних функції  $f(x)$ .

Користуючись розвиненнями в ряд Маклорена згідно з завданням 2816 знайти розклади таких функцій та вказати інтервали їх збіжностей:

$$2817. \frac{2x-3}{(x-1)^2}.$$

$$2818. \frac{3x-5}{x^2-4x+3}.$$

$$2819. xe^{-2x}.$$

$$2820. e^{x^2}.$$

$$2821. \cos 2x.$$

$$2822. \cos^2 x.$$

$$2823. \sin x + x \cos 3x.$$

$$2824. \frac{x}{9+x^2}.$$

$$2825. \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}.$$

$$2826. \ln \frac{1+x}{1-x}.$$

Розкласти за степенями  $x$  такі функції та вказати інтервали, на яких ці розклади мають місце:

$$2827. (1+x) \ln(1+x).$$

$$2828. \arcsin x.$$

$$2829. \ln(x + \sqrt{1+x^2}).$$

$$2830. \sin^2 x \cos^2 x.$$

$$2831. (1+x)e^{-x}.$$

$$2832. (1+e^x)^3.$$

$$2833. \sqrt[3]{x+8}.$$

$$2834. \frac{x^2 - 3x + 1}{x^2 - 5x + 6}.$$

$$2835. \int_0^x \frac{\sin x}{x} dx.$$

$$2836. \int_0^x e^{-x^2} dx.$$

$$2837. \int_0^x \frac{\ln(x+1)}{x} dx.$$

$$2838. \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}.$$

Написати три перших відмінних від нуля члени розкладу в ряд за степенями  $x$  функцій:

$$2839. \operatorname{tg} x.$$

$$2840. e^{\cos x}.$$

$$2841. \ln \cos x.$$

$$2842. e^x \sin x.$$

2843. Розвинути в ряди за степенями  $x+2$  функції:

$$a) x^3 - 2x^2 + 6x - 3;$$

$$б) x^4 - 6x^3 + 5x + 1;$$

$$в) \frac{1}{x^2 + 4x + 7};$$

$$г) e^x.$$

2844. Розвинути в ряди за степенями  $x-1$  функції:

$$a) \ln x;$$

$$б) \frac{1}{x};$$

$$в) \sqrt{x^3};$$

$$г) \sqrt[3]{x}.$$

2845. Розвинути в ряд за степенями  $x-4$  функцію  $\sqrt{x}$ .

**2846.** Розвинути в ряд за степенями  $x - \frac{\pi}{4}$  функцію  $\cos^2 x$ .

**2847.** Розвинути в ряд за степенями  $x - \frac{\pi}{2}$  функцію  $\cos x$ .

Скільки членів відповідного ряду Маклорена треба взяти, щоб обчислити:

**2848.**  $\sqrt[5]{33}$  з точністю до 0,001?

*Розв'язання.*

Перетворимо  $\sqrt[5]{33}$  так:

$$\sqrt[5]{33} = \sqrt[5]{32+1} = 2\sqrt[5]{1+\frac{1}{32}}.$$

Скориставшись біноміальним рядом, дістанемо такий збіжний знакопочерговий ряд:

$$\begin{aligned}\sqrt[5]{33} &= 2\left(1 + \frac{1}{32}\right)^{\frac{1}{5}} = 2\left(1 + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{32} + \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{5} \left(\frac{1}{5} - 1\right) \left(\frac{1}{32}\right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{5} \left(\frac{1}{5} - 1\right) \left(\frac{1}{5} - 2\right) \left(\frac{1}{32}\right)^3 + \dots\right).\end{aligned}$$

Для такого ряду похибка у разі обчислення його суми за формулою  $S = S_n$  не перевищує за абсолютною величиною першого із відкинутих членів. Обчислюємо за абсолютною величиною члени ряду доти, поки не знайдемо такий, що буде менший за 0,001; це і буде перший із відкинутих членів.

$$|u_1| = 2; \quad |u_2| = \frac{1}{80}; \quad |u_3| = \frac{4}{5 \cdot 5 \cdot 1024} < 0,001.$$

Отже, для обчислення  $\sqrt[5]{33}$  з точністю до 0,001 достатньо залишити два члени ряду.

**2849.**  $\cos 18^\circ$  з точністю до 0,001?

**2850.**  $\sin 15^\circ$  з точністю до 0,0001?

**2851.** Величину числа  $e$  з точністю до 0,0001?

**2852.**  $\ln 2$  з точністю до 0,001?

Обчислити з точністю до 0,001:

2853.  $\sqrt[4]{19}$ .

2854.  $\cos 1^\circ$ .

2855.  $\sqrt[3]{30}$ .

2856.  $\sqrt[3]{70}$ .

2857.  $\sqrt[3]{500}$ .

2858.  $\sqrt[10]{1027}$ .

2859.  $e^2$ .

2860.  $\sqrt{e}$ .

2861.  $\sqrt[3]{1,015}$ .

2862.  $\int_0^{\frac{1}{9}} \sqrt{x} e^x dx$ .

2863.  $\int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$ .

2864.  $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx$ .

2865.  $\int_0^{0,1} \frac{\ln(x+1)}{x} dx$ .

2866.  $\int_{0,1}^{\frac{1}{3}} \frac{dx}{1+x^4}$ .

2867.  $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$ .

2868.  $\int_{0,1}^{0,2} \frac{e^{-x}}{x^3} dx$ .

2869.  $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{\cos x} dx$ .

Обчислити з точністю до 0,0001:

2870.  $\ln 1,3$ .

2871.  $\frac{1}{e}$ .

2872.  $\sin 1^\circ$ .

2873.  $\cos 10^\circ$ .

2874.  $\operatorname{arctg} \frac{1}{2}$ .

2875.  $\cos 3^\circ$ .

2876.  $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin x}{x} dx$ .

2877.  $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ .

$$2878. \int_0^{\frac{1}{4}} \sqrt{1+x^3} dx.$$

$$2879. \int_0^{0,5} e^{\sin x} dx.$$

Використовуючи розвинення функцій в ряд Маклорена, знайти такі границі:

$$2880. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(\operatorname{tg} x - \sin x) - x^3}{x^5}.$$

$$2881. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x+x^2) + \ln(1-x+x^2)}{x(e^x - 1)}.$$

$$2882. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \ln(\sqrt{1+x^2} - x)}{x^3}.$$

$$2883. \lim_{x \rightarrow 0} = \frac{(1+x)e^{-x} - (1-x)e^x}{\arcsin x - \operatorname{arctg} x}.$$

$$2884. \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x^2} - \frac{\operatorname{ctg} x}{x} \right).$$

$$2885. \lim_{x \rightarrow 0} \left( x - x^2 \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right) \right).$$

$$2886. \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x^2} - \operatorname{ctg}^2 x \right).$$

$$2887. \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{2 + \cos x}{x^3 \sin x} - \frac{3}{x^4} \right).$$


---

## ВІДПОВІДІ

---

9. -1.      10. 0.      11. -1.      12. 1.      13. 1.      14. 1.  
 15. 40.      16. 0.      17. 1.      18. 4.      19.  $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ .  
 20.  $(ab + bc + ac)x + abc$ .      28. 0.      29. 0.      30. 0.  
 31. 0.      32. 0.      33.  $ab + 15b + 12c - 19d$ .      34.  $2a - 8b + c + 5d$ .  
 35.  $abcd$ .      36.  $abcd$ .      37.  $xуxуv$ .      38. -8.      39. -9.  
 40. 18.      41. 27.      42. -6.      43. 10.      44. 1.      45. 52.  
 46. 5.      47. 100.      48. 1.      56.  $x_1 = 3; x_2 = -1$ .  
 57. Якщо  $ac - b^2 \neq 0$ , то система визначена, а якщо  $ac - b^2 = 0$  — невизначена. Несумісною не може бути.  
 58. При  $a \neq \pm 6$  система визначена, при  $a = 6$  — невизначена, при  $a = -6$  — несумісна.  
 59.  $x_1 = 3; x_2 = -2; x_3 = 2$ .      60.  $x_1 = x_2 = x_3 = 1$ .      61.  $x_1 = 1; x_2 = 2; x_3 = -1$ .  
 62. Система невизначена.  $x_1 = 10x_3 + 1; x_2 = 7x_3$ . Надаючи  $x_3$  довільних значень, знайдемо  $x_1$  і  $x_2$ .  
 63. Система несумісна.  
 64. При  $a \neq 3$  система визначена, при  $a = 3$  — несумісна.  
 65. Якщо  $4a^3 - 45a + 58 \neq 0$ , то система визначена, а якщо  $4a^3 - 45a + 58 = 0$  — несумісна.  
 66. При  $ab \neq 15$  система визначена, при  $a = 3, b = 5$  невизначена, при  $ab = 15$ , але  $a \neq 3, b \neq 5$  — несумісна.  
 67. При  $ab \neq 12$  система визначена, при  $a = 3, b = 4$  — невизначена, при  $ab = 12$ , але  $a \neq 3, b \neq 4$  — несумісна.  
 68.  $x_1 = x_2 = 1; x_3 = x_4 = -1$ .  
 69.  $x_1 = -2; x_2 = 0; x_3 = 1; x_4 = -1$ .  
 70.  $x_1 = 2; x_2 = -2; x_3 = 1; x_4 = -1$ .  
 71.  $x_1 = -0,4; x_2 = -1,2; x_3 = 3,4; x_4 = 1$ .      72. Система несумісна.  
 84.  $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$ .      85.  $\begin{pmatrix} \alpha a + \delta b & \beta a + b & \gamma a + \psi b \\ \alpha c + \delta d & \beta c + d & \gamma c + \psi d \end{pmatrix}$ .      86.  $\begin{pmatrix} 0 \\ 7 \end{pmatrix}$ .

$$87. \begin{pmatrix} 1 & 5 & -5 \\ 3 & 10 & 0 \\ 2 & 9 & -7 \end{pmatrix}.$$

$$88. \begin{pmatrix} -16 & 28 \\ -15 & -9 \end{pmatrix}.$$

$$89. \begin{pmatrix} -4 & -31 \\ 8 & 7 \\ 12 & 27 \end{pmatrix}.$$

$$90. \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$91. \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$92. \begin{pmatrix} 80 & -28 \\ 37 & -4 \\ 14 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$93. (22 \quad -31).$$

$$94. \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$95. \begin{pmatrix} 13 & -14 \\ 21 & -22 \end{pmatrix}.$$

$$96. \begin{pmatrix} 304 & -61 \\ 305 & -62 \end{pmatrix}.$$

$$97. \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$98. \begin{pmatrix} 21 & -23 & 15 \\ -13 & 4 & 10 \\ -9 & 22 & 25 \end{pmatrix}.$$

$$99. \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

100. Ні.

101. У загальному випадку ні.

$$102. \begin{pmatrix} a & 2b \\ 3b & a+3b \end{pmatrix}, \text{ де } a \text{ і } b \text{ — будь-які числа.}$$

$$103. \begin{pmatrix} a & 3b \\ -5b & a+9b \end{pmatrix}, \text{ де } a, b, c \text{ — будь-які числа, що задовольняють співвід-}$$

ношення  $a^2 + bc = 0$ .

$$106. \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

$$107. \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$108. \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{ad - bc}.$$

$$109. \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

$$110. \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{pmatrix}.$$

$$111. \begin{pmatrix} -8 & 29 & -11 \\ -5 & 18 & -7 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$112. \begin{pmatrix} -\frac{7}{3} & 2 & -\frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} & -1 & -\frac{1}{3} \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$113. \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$114. \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$115. \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$116. \begin{pmatrix} 6 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$117. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

$$118. \begin{pmatrix} -7 & -1 & 5 \\ 15 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$119. \begin{pmatrix} -6 & 22 \\ 0 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

$$120. \begin{pmatrix} -40 & -50 & 43 \\ 29 & 36 & -31 \end{pmatrix}.$$

$$121. (1; 2; 3).$$

$$122. (1; -2; 0).$$

$$123. (-2; 1; -1).$$

$$124. (3; 0; -1). \quad 125. (1; 1; 1). \quad 126. (1; -1; 2; 0).$$

$$139. 2. \quad 140. 3. \quad 141. 3. \quad 142. 2. \quad 143. 3 \quad 144. 2. \quad 145. 3.$$

$$146. x_1 = \frac{1}{11}(x_3 - 9x_4 - 2); \quad x_2 = \frac{1}{11}(-5x_3 + x_4 + 10); \quad (-1; 1; 0; 1).$$

$$147. x_3 = 22x_1 - 33x_2 - 11; \quad x_4 = -16x_1 + 24x_2 + 8; \quad (2; 2; 0; 0).$$

$$148. x_3 = 1 - 3x_1 - 4x_2; \quad x_4 = 1; \quad (-1; 1; 0; 1).$$

149. Система несумісна.

150. Система має єдиний розв'язок  $(3; 2; 1)$ .

$$151. x_3 = 6 - 15x_1 + 15x_2; \quad x_4 = -7 + 18x_1 - 12x_2; \quad (1; 1; 1; -1).$$

$$152. x_3 = \frac{1}{5}(34x_1 - 17x_2 - 29); \quad x_4 = \frac{1}{5}(16x_1 - 8x_2 - 16); \quad \left(2; 1; \frac{22}{5}; \frac{8}{5}\right).$$

$$153. x_3 = 2 - \frac{1}{13}(27x_1 - 9x_2); \quad x_4 = -1 + \frac{1}{13}(3x_1 - x_2); \quad \left(1; 1; \frac{8}{13}; -\frac{11}{13}\right).$$

154. Система несумісна.

$$155. x_3 = -1 - 8x_1 + 4x_2; \quad x_4 = 0; \quad x_5 = 1 + 2x_1 - x_2; \quad (1; 2; -1; 0; 1).$$

$$156. x_3 = 13; \quad x_4 = 19 - 3x_1 - 2x_2; \quad x_5 = -34; \quad (1; 8; 13; 0; -34).$$

$$157. x_3 = -\frac{9}{2} - x_1 - 2x_2; \quad x_4 = -\frac{25}{2} - 2x_1 - 4x_2; \quad x_5 = -\frac{15}{2} - 2x_1 - 4x_2; \quad \left(1; -3; \frac{1}{2}; -\frac{5}{2}; \frac{5}{2}\right).$$

$$158. \text{ При } \alpha \neq 0 \text{ система несумісна. При } \alpha = 0 \quad x_1 = -\frac{1}{2}(5x_3 + 13x_4 + 3); \quad x_2 = \\ = -\frac{1}{2}(7x_3 + 19x_4 + 7).$$

$$159. \text{ При } \alpha = 0 \text{ система несумісна. При } \alpha \neq 0 \quad x_1 = \frac{4-\alpha}{5\alpha} - \frac{3}{5}x_3; \quad x_2 = \\ = \frac{9\alpha-16}{5\alpha} - \frac{8}{5}x_3; \quad x_4 = \frac{1}{\lambda}.$$

$$160. \text{ При } \alpha = 1 \text{ система несумісна. При } \alpha \neq 1 \quad x_1 = \frac{1}{8}\left(\frac{43-9\alpha}{1-\alpha} - 9x_3\right); \quad x_2 = \\ = \frac{1}{4}\left(\frac{5}{1-\alpha} + x_3\right); \quad x_4 = \frac{5}{\alpha-1}.$$

$$161. \text{ При } (\alpha-1)(\alpha+2) \neq 0 \text{ система має єдиний розв'язок: } x_1 = x_2 = x_3 = \frac{1}{\alpha+3}.$$

При  $\alpha = 1$   $x_1 = 1 - x_2 - x_3$ . При  $\alpha = -2$  система несумісна.

$$162. \text{ При } \alpha(\alpha+3) \neq 0 \text{ система має єдиний розв'язок: } x_1 = \frac{2-\alpha^2}{\alpha(\alpha+3)};$$

$$x_2 = \frac{2\alpha-1}{\alpha(\alpha+3)}; \quad x_3 = \frac{\alpha^3+2\alpha^2-\alpha-1}{\alpha(\alpha+3)}. \text{ При } \alpha = 0 \text{ і } \alpha = -3 \text{ система несумісна.}$$

163. При  $\alpha(\alpha+3) \neq 0$  система має єдиний розв'язок:  $x_1 = 2 - \alpha^2$ ;  $x_2 = 2\alpha - 1$ ;  $x_3 = \alpha^3 + 2\alpha^2 - \alpha - 1$ . При  $\alpha = 0$   $x_1 = -x_2 - x_3$ . При  $\alpha = -3$   $x_1 = x_2 = x_3$ .

164.  $x_1 = \frac{13}{7}x_3$ ;  $x_2 = \frac{2}{7}x_3$ . (13; 2; 7)

165.  $x_3 = -\frac{5}{2}x_1 + 5x_2$ ;  $x_4 = \frac{7}{2}x_1 - 7x_2$ ;  $\left(1; 0; -\frac{5}{2}; \frac{7}{2}\right)$ ; (0; 1; 5; -7).

166.  $x_4 = -\frac{1}{4}(9x_1 + 6x_2 + 8x_3)$ ;  $x_5 = \frac{1}{4}(3x_1 + 2x_2 + 4x_3)$ ; фундаментальна система:  $\left(1; 0; 0; -\frac{9}{4}; \frac{3}{4}\right)$ ;  $\left(0; 1; 0; -\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right)$ ; (0; 0; 1; -2; 1).

167. Система має лише тривіальний розв'язок, фундаментальна система не існує.

168.  $x_4 = -\frac{1}{11}(9x_1 - 3x_2 + 10x_3)$ ;  $x_5 = -\frac{1}{11}(3x_1 - x_2 - 4x_3)$ ; фундаментальна система:  $\left(1; 0; 0; -\frac{9}{11}; -\frac{3}{11}\right)$ ;  $\left(0; 1; 0; \frac{3}{11}; \frac{1}{11}\right)$ ;  $\left(0; 0; 1; -\frac{10}{11}; \frac{4}{11}\right)$ .

169.  $x_1 = 8x_3 - 7x_4$ ;  $x_2 = -6x_3 + 5x_4$ ; фундаментальна система: (8; -6; 1; 0); (-7; 5; 0; 1).

170.  $x_3 = -\frac{3}{4}x_1 + \frac{3}{8}x_2$ ;  $x_4 = \frac{x_1}{8} - \frac{x_2}{8}$ ; фундаментальна система:  $\left(1; 0; -\frac{3}{4}; \frac{1}{4}\right)$ ;  $\left(0; 1; \frac{3}{8}; -\frac{1}{8}\right)$ .

171.  $x_1 = -\frac{x_4}{4} + \frac{7x_5}{5}$ ;  $x_2 = -\frac{x_4}{2} - \frac{6x_5}{5}$ ;  $x_3 = -\frac{x_4}{4} - \frac{3x_5}{5}$ ;  $\left(-\frac{1}{4}; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{4}; 1; 0\right)$ ;  $\left(\frac{7}{5}; -\frac{6}{5}; -\frac{3}{5}; 0; 1\right)$ .

172. Четвертий рядок разом з будь-якими двома з перших трьох рядків утворюють фундаментальну систему розв'язків, а решта рядків у фундаментальну систему не входять.

180. (1, 4 - 7, 7). 181.  $\alpha = -4$ . 182. (0, 1, 2, -2). 183. (1, 2, 3, 4).

184. Лінійно незалежна. 185. Лінійно залежна. 186. Лінійно незалежна.

187. Лінійно залежна. 188. Лінійно залежна. 189. Лінійно незалежна.

194.  $\lambda = 15$ . 195.  $\lambda$  — будь-яке. 196.  $\lambda$  — будь-яке.

197.  $\lambda \neq 12$ . 198.  $\lambda \in \emptyset$ .

199. 1)  $\vec{a}_1, \vec{a}_3$ ; 2)  $\vec{a}_1, \vec{a}_4$ ; 3)  $\vec{a}_2, \vec{a}_3$ ; 4)  $\vec{a}_2, \vec{a}_4$ . 200. 1)  $a_1, a_2$ ; 2)  $a_2, a_3$ .

201. Будь-які два вектори. 202. 1)  $\vec{a}_1, \vec{a}_4$ ; 2)  $\vec{a}_1, \vec{a}_4$ ; 3)  $\vec{a}_3, \vec{a}_4$ .

203. Будь-які три вектори, крім  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_5$  і  $\vec{a}_3, \vec{a}_4, \vec{a}_5$ .

204. Наприклад, вектори  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_4$ , тоді  $\vec{a}_3 = \vec{a}_1 - \vec{a}_2$ .

205. Одну з баз утворюють вектори  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ , тоді  $\vec{a}_4 = 2\vec{a}_1 - 3\vec{a}_2 + 4\vec{a}_3$ .
206. Одну з баз утворюють вектори  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_5$ ; тоді  $\vec{a}_3 = \vec{a}_1 - \vec{a}_2 + \vec{a}_5$ ;  $\vec{a}_4 = 3\vec{a}_1 + 4\vec{a}_2 - 2\vec{a}_5$ .
207.  $\vec{x} = (1, 2, 3)$ . 208.  $\vec{x} = (1, 1, 1)$ . 209.  $(0, 2, 1, 2)$ . 210.  $\vec{x} = (1, 1, -1, -1)$ .
211.  $x_1 = -27x'_1 - 71x'_2 - 41x'_3$ ;  $x_2 = 9x'_1 + 20x'_2 + 9x'_3$ ;  $x_3 = 4x'_1 + 12x'_2 + 8x'_3$ .
212.  $x_1 = 2x'_1 + x'_3 - x'_4$ ;  $x_2 = -3x'_1 + x'_2 - 2x'_3 + x_4$ ;  $x_3 = x'_1 - 2x'_2 + 2x'_3 - x'_4$ ;  $x_4 = x'_1 - x'_2 + x'_3 - x'_4$ .
213.  $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -6 & 11 & 5 \\ -12 & 13 & 10 \\ 6 & -5 & -5 \end{pmatrix}$ . 214.  $\begin{pmatrix} -12 & 44 & -17 \\ -14 & 50 & -19 \\ -2 & 8 & -3 \end{pmatrix}$ .
215.  $(1, 1, -1)$ ;  $(-1, 1, 0)$ ;  $(1, 1, 2)$ .
216.  $(2, 1, 0)$ ;  $(2, 4, -5)$ ;  $(1, 2, 2)$ .
217.  $(1, -2, 2, -3)$ ;  $(2, -3, 2, 4)$ ;  $(2, 2, 1, 0)$ ;  $(5, -2, -6, -1)$ .
218.  $(1, 1, 1, 2)$ ;  $(1, 2, 3, -3)$ ;  $(1, -2, 1, 0)$ ;  $(25, 4, -17, -6)$ .
227.  $(9, -9, 16)$ . 228.  $(19, 30, 17)$ . 229.  $(-5, -1, 5, -7)$ .
230.  $(-4, -1, 4)$ ,  $(11, 16, -8)$ ;  $(5, 12, 6)$ .
231.  $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ . 232.  $\begin{pmatrix} 2 & -11 & 6 \\ 1 & -7 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ . 233.  $\begin{pmatrix} -6 & 11 & 5 \\ -12 & 13 & 10 \\ 6 & -5 & -5 \end{pmatrix}$ .
234.  $\begin{pmatrix} 40 & -6 \\ -71 & -6 \\ 2 & \end{pmatrix}$ . 235.  $\frac{1}{49} \begin{pmatrix} 129 & 11 \\ 411 & 26 \end{pmatrix}$ . 236.  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ .
237.  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ . 238. 1)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ ; 2)  $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & -8 & -7 \\ 1 & 4 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$ .
239.  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ ;  $\vec{b} = c(1, 1, -1)$ , де  $c \neq 0$ .
240.  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$ ;  $\vec{b} = c_1(1, 2, 0) + c_2(0, 0, 1)$ ;  $c_1, c_2$  одночасно не рівні нулю.
241.  $\lambda_1 = 1$ ;  $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ ;  $\vec{b}_1 = c(1, 1, 1)$ ;  $b_2 = c(1, 2, 3)$ ;  $c \neq 0$ .
242.  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ ;  $\vec{b} = c(3, 1, 1)$ ,  $c \neq 0$ .
243.  $\lambda_1 = 3$ ;  $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$ ;  $\vec{b}_1 = c(1, 2, 2)$ ;  $\vec{b}_2 = c(1, 2, 1)$ ;  $c \neq 0$ .
244.  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ ;  $\lambda_3 = -1$ ;  $\vec{b}_1 = c_1(2, 1, 0) + c_2(1, 0, -1)$ ;  $\vec{b}_2 = c(3, 5, 6)$ ,  $c_1$  і  $c_2$  не дорівнюють нулю одночасно,  $c \neq 0$ .
245.  $\lambda_1 = 1$ ;  $\lambda_2 = 2 + 3i$ ;  $\lambda_3 = 2 - 3i$ ;  $\vec{b}_1 = c(1, 2, 1)$ ;  $\vec{b}_1 = c(3 - 3i, 5 - 3i, 4)$ ;  $\vec{b}_3 = (3 + 3i, 5 + 3i, 4)$ .

246.  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ ;  $\lambda_3 = \lambda_4 = 0$ ;  $\vec{b}_1 = c(0, 0, 0, 1)$ ;  $\vec{b}_2 = c_1(0, 1, 0, 0) + c_2(0, 0, 1, 0)$ ;  $c \neq 0$ ,  $c_1$  і  $c_2$  не дорівнюють нулю одночасно.

247.  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ ;  $\lambda_3 = \lambda_4 = 0$ ;  $\vec{b}_1 = c_1(1, 0, 1, 0) + c_2(0, 0, 0, 1)$ ;  $\vec{b}_2 = c_1(0, 1, 0, 0) + c_2(0, 0, 1, 0)$ ;  $c_1$  і  $c_2$  не дорівнюють нулю одночасно.

248. Так.

249. Так.

250. Так.

$$251. \vec{e}_1 = (1, 1, 2); \quad \vec{e}_2 = (1, 0, 1); \quad \vec{e}_3 = (1, 2, 2); \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$252. \vec{e}_1 = (1, 2, 1); \quad \vec{e}_2 = (66 - 36\sqrt{3}, 80 - 46\sqrt{3}, 91 - 29\sqrt{3});$$

$$\vec{e}_3 = (66 + 36\sqrt{3}, 80 + 46\sqrt{3}, 91 + 29\sqrt{3}); \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

$$253. \vec{e}_1 = (1, 1, 0, 0); \quad \vec{e}_2 = (1, 0, 1, 0); \quad \vec{e}_3 = (1, 0, 0, 1); \quad \vec{e}_4 = (1, -1, -1, -1);$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$254. \vec{e}_1 = (1, 0, 0, 1); \quad \vec{e}_2 = (0, 1, 1, 0); \quad \vec{e}_3 = (0, -1, 1, 0); \quad \vec{e}_4 = (-1, 0, 0, 1);$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$264. \lambda > 2. \quad 265. |\lambda| < \frac{1}{3}\sqrt{15}. \quad 266. -0,8 < \lambda < 0. \quad 267. \text{Значень не існує.}$$

$$268. \text{Значень не існує.} \quad 269. y_1^2 + y_2^2 - y_3^2. \quad 270. y_1^2 - y_2^2 - y_3^2.$$

$$271. y_1^2 - y_2^2. \quad 272. y_1^2 - y_2^2 - y_3^2 - y_4^2. \quad 273. y_1^2 + y_2^2 - y_3^2.$$

$$274. 2y_1^2 + 10y_2^2 + 190y_3^2. \quad y_1 = x_1 - \frac{1}{2}x_2 + x_3; \quad y_2 = \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{10}x_3; \quad y_3 = \frac{1}{10}x_3.$$

$$275. 3y_1^2 - 30y_2^2 + 530y_3^2. \quad y_1 = x_1 + \frac{2}{3}x_2 - \frac{1}{2}x_3; \quad y_2 = \frac{1}{3}x_2 - \frac{1}{20}x_3; \quad y_3 = \frac{1}{20}x_3.$$

$$276. 2y_1^2 + 6y_2^2 - 6y_3^2 + 2y_4^2. \quad y_1 = \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2; \quad y_2 = \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{6}x_3; \quad y_3 = \frac{1}{6}x_3 + \frac{1}{2}x_4;$$

$$y_4 = \frac{3}{2}x_4.$$

$$277. 3y_1^2 + 6y_2^2 + 9y_3^2. \quad x_1 = \frac{2}{3}y_1 - \frac{1}{3}y_2 + \frac{2}{3}y_3; \quad x_2 = \frac{2}{3}y_1 + \frac{2}{3}y_2 - \frac{1}{3}y_3; \quad x_3 =$$

$$= -\frac{1}{3}y_1 + \frac{2}{3}y_2 + \frac{2}{3}y_3.$$

$$278. \quad 3y_1^2 + 6y_2^2 - 2y_3^2; \quad x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}y_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_3; \quad x_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}y_1 - \frac{1}{\sqrt{6}}y_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_3; \quad x_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}y_1 - \frac{2}{\sqrt{6}}y_2.$$

$$279. \quad 5y_1^2 - y_2^2 - y_3^2. \quad x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}y_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_3; \quad x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}y_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}y_3; \quad x_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}y_1 - \frac{2}{\sqrt{6}}y_2.$$

$$280. \quad 3y_1^2 - 6y_2^2. \quad x_1 = \frac{2}{3}y_1 + \frac{\sqrt{2}}{0}y_2 + \frac{\sqrt{2}}{2}y_3; \quad x_2 = \frac{1}{3}y_1 - \frac{2\sqrt{2}}{3}y_2; \quad x_3 = \frac{2}{3}y_1 + \frac{\sqrt{2}}{6}y_2 - \frac{\sqrt{2}}{2}y_3.$$

$$281. \quad 9y_1^2 + 9y_2^2 - 9y_3^2. \quad x_1 = \frac{2}{3}y_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}y_2 + \frac{\sqrt{2}}{6}y_3; \quad x_2 = \frac{1}{3}y_1 - \frac{2\sqrt{2}}{3}y_3; \quad x_3 = \frac{2}{3}y_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}y_2 + \frac{\sqrt{2}}{6}y_3.$$

$$282. \quad 2y_1^2 + 4y_2^2 - 2y_3^2 - 4y_4^2. \quad x_1 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2 + y_3 + y_4); \quad x_2 = \frac{1}{2}(-y_1 + y_2 + y_3 - y_4); \quad x_3 = \frac{1}{2}(-y_1 - y_2 + y_3 + y_4); \quad x_4 = \frac{1}{2}(y_1 - y_2 + y_3 - 4y_4).$$

$$283. \quad 5y_1^2 - 5y_2^2 + 5y_3^2. \quad x_1 = \frac{\sqrt{5}}{5}(2y_1 + y_2); \quad x_2 = \frac{\sqrt{5}}{5}(y_1 - 2y_2); \quad x_3 = \frac{\sqrt{5}}{5}(2y_3 + y_4); \quad x_4 = \frac{\sqrt{5}}{5}(-y_3 + 2y_4).$$

$$284. \quad f_1 = -2y_1^2 + \frac{2}{3}y_2^2; \quad g_1 = y_1^2 + y_2^2. \quad x_1 = y_1 + \frac{\sqrt{3}}{3}y_2; \quad x_2 = \frac{1}{2}y_1 - \frac{\sqrt{3}}{6}y_2.$$

$$285. \quad f_1 = 9(y_1^2 + y_2^2 - y_3^2); \quad g_1 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2. \quad x_1 = \sqrt{2}y_2; \quad x_2 = \frac{1}{6}y_1 - \frac{\sqrt{2}}{3}y_3; \quad x_3 = \frac{2}{3}y_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}y_2 + \frac{\sqrt{2}}{6}y_3.$$

$$286. \quad f_1 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - 3y_4^2; \quad y_1 = y_2^2 + y_3^2 + y_4^2. \quad x_1 = y + y_2 + y_3 + y_4; \quad x_2 = y_2 - y_4; \quad x_3 = \frac{1}{2}(y_1 - y_2 + y_3 - y_4); \quad x_4 = \frac{1}{2}(y_1 - y_2 - y_3 + y_4).$$

$$287. \quad f_1 = y_1^2 + 2y_2^2 + 2y_3^2 - y_4^2; \quad g_1 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2. \quad x_1 = \frac{1}{3}(2y_2 + 2y_3 + y_4); \quad x_2 = \frac{2}{3}(y_2 - 2y_3 + 2y_4); \quad x_3 = y_3 - 2y_4; \quad x_4 = y_1.$$

297. 1)  $\vec{a} \perp \vec{b}$ ; 2)  $\vec{a} \parallel \vec{b}$  мають однаковий напрям; 3), 4)  $\vec{a} \parallel \vec{b}$ , мають різні напрями.

298.  $|\vec{p}| = |\vec{q}|$ .

299.  $\vec{AM} = \vec{c} + \frac{1}{2}\vec{a}$  або  $\vec{AM} = \frac{1}{2}(\vec{c} - \vec{b})$ ;  $\vec{BN} = \left(\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}\right)$  або  $\vec{BN} = \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{c})$ ;

$\vec{CP} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$  або  $\vec{CP} = \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a})$ .

300.  $\vec{AC} = 2(\vec{q} - \vec{p})$ ;  $\vec{OM} = 2\vec{q} + \vec{p}$ ;  $\vec{ON} = 3\vec{p} + \vec{q}$ ;  $\vec{MN} = 2\vec{p} - \vec{q}$ .

301.  $\vec{D_1A} = -\left(\vec{c} + \frac{1}{5}\vec{a}\right)$ ;  $\vec{D_2A} = -\left(\vec{c} + \frac{2}{5}\vec{a}\right)$ ;  $\vec{D_3A} = -\left(\vec{c} + \frac{3}{5}\vec{a}\right)$ ;  $\vec{D_4A} = -\left(\vec{c} + \frac{4}{5}\vec{a}\right)$ .

302.  $\vec{AB} = \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b})$ ;  $\vec{BC} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$ ;  $\vec{CD} = \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a})$ ;  $\vec{DA} = -\frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$ .

303.  $\vec{AC} = \frac{1}{2}(3\vec{m} + \vec{n})$ ;  $\vec{AD} = \vec{m} + \vec{n}$ ;  $\vec{AF} = \frac{1}{2}(\vec{n} - \vec{m})$ ;  $\vec{EF} = \frac{1}{2}(\vec{n} - \vec{m})$ .

318.  $135^\circ$ . 319.  $\alpha = 40$ . 320.  $\angle B = \angle C = 45^\circ$ . 321.  $\cos = \frac{2}{\sqrt{5}}$ .

322.  $(\hat{st}) = \frac{\pi}{3}$ . 323.  $\text{np}_{\vec{b}}\vec{a} = 2$ ;  $\cos\alpha = \frac{5}{13}$ ;  $\cos\beta = -\frac{12}{13}$ . 324.  $90^\circ$ .

325. 40. 326. 7. 327.  $\text{np}_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{4\sqrt{2}}{3}$ . 328.  $\sqrt{7}$  і  $\sqrt{13}$ .

329.  $\frac{5}{2\sqrt{7}}$  і  $-\frac{2}{\sqrt{7}}$ . 330. -6. 331.  $\cos\alpha = \frac{5}{6}$ . 332.  $\cos\alpha = 0,26\sqrt{10}$ .

333.  $\sqrt{21}$  кв. од.,  $h = \sqrt{4,2}$ . 334. 1)  $2(\vec{k} - \vec{i})$ ; 2)  $2\vec{a} \times \vec{c}$ ; 3)  $\vec{a} \times \vec{c}$ ; 4) 3.

335.  $50\sqrt{2}$ . 336. 24,5. 337.  $\sqrt{\frac{248}{273}}$ . 338.  $\frac{6}{7}$ . 339. 51.

340. Так. 342.  $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ . 343. 14. 349.  $AB = 5$ ;  $BC = 13$ ;  $AC = 8\sqrt{2}$ .

351.  $(0; -3)$  і  $(0; -9)$ . 352.  $(5; 0)$ . 353.  $18x - 8y = 53$ .

354.  $(2; 5)$ ;  $(16; 3)$ . 355.  $\sqrt{26}$ ;  $\sqrt{17}$  і  $\sqrt{41}$ . 356.  $(-2; 6)$ ;  $(8; 2)$ ;  $(-6; 10)$ .

357.  $\left(10\frac{1}{2}; 10\right)$ ;  $(4; -3)$ . 358.  $(-4; -1)$ .

359.  $(5,4; 2,8)$  і  $(7,8; 4,4)$ ;  $(10,2; 4,4)$ ;  $(12,6; 5,2)$ . 360.  $(7,2; 4,5)$ .

361.  $(-2; 1)$ . 362.  $\left(3\frac{1}{3}; 5\frac{1}{3}\right)$ . 363.  $15 + 5\sqrt{5}$ ;  $s = 25$ . 364. 12,5.

365. 1), 3). 366. 2,2. 377.  $5x + 2y + 4 = 0$ ;  $5x + 2y - 25 = 0$ .

$$378. 3y - x - 2 = 0; y = -3x + 12; y = 5x - 4.$$

$$379. 1) y = 4x; 2) y = -2x; 3) y = -3x \text{ аёо } y = \frac{1}{3}x; 4) y = -(2 + \sqrt{3})x \text{ аёо } y = -(2 - \sqrt{3})x.$$

$$380. (3; -1); (3; 3); \left(-\frac{9}{5}; \frac{3}{5}\right); 45^\circ; 71^\circ 34'; 63^\circ 26'.$$

$$381. y = (-1 \pm \sqrt{2})x. \quad 382. y = -2x + 7; y = \frac{1}{2}x - 3. \quad 383. (1; -1); \left(\frac{8}{3}; -2\right).$$

$$384. 3x + 4y - 16 = 0; 5x + 3y - 1 = 0; 2x - y - 7 = 0.$$

$$385. 4x + 3y - 27 = 0; x = 3; 7x - 3y - 39 = 0.$$

$$386. x - 2y + 9 = 0; 2x - y - 2 = 0 \text{ аёо } 2x - y + 6 = 0; x + 2y - 7 = 0.$$

$$387. 2,8; 0; 1,4. \quad 388. \frac{\sqrt{13}}{2}. \quad 389. 4x - 3y + 26 = 0 \text{ и } 4x - 3y - 24 = 0.$$

$$390. 4x - 3y + 20 = 0; 4x - 3y - 20 = 0.$$

$$391. 1) x - y = 0 \text{ и } x + y - 4 = 0; 2) 3x - y = 12; x + 3y = 4.$$

$$392. (0; -12). \quad 393. \pm \frac{4}{3}. \quad 394. 8x - 12y + 11 = 0.$$

$$395. x - 2y = 0 \text{ и } x - 2y + 5 = 0 \text{ аёо } 2x + y = 0; 2x + y - 5 = 0.$$

$$396. y = x + 2; x - 5y = 6; y = -x; 2y = x. \quad 397. h_1 = h_2 = \frac{6}{\sqrt{5}}.$$

$$398. (0; 2); (4; 0); (2; 4); (-2; 6).$$

$$399. 2x + 7y + 22 = 0; 7x + 2y - 13 = 0; x - y + 2 = 0.$$

$$400. 3x + 4y = 15; h = 4,4.$$

$$401. 2x + y - 8 = 0; x - 3y + 10 = 0; x + 4y - 4 = 0.$$

$$402. x + 7y = 6; x - y = 6; 7x + y = 10. \quad 403. (4, 5).$$

$$419. (x+1)^2 + (y-3)^2 = 5. \quad 420. (x+3)^2 + (y+2)^2 = 25.$$

$$421. a = 4; b = -3; R = 2.$$

$$422. 1) (x-2)^2 + y^2 = 4; \quad 2) x^2 + (y+3)^2 = 16; \quad 3) (x+1)^2 + (y-5)^2 = 25;$$

$$4) \left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + (y-1)^2 = \frac{58}{9}.$$

$$423. 1) x^2 + y^2 = 9; 2) x^2 + y^2 - 6x = 0.$$

$$424. (x-2)^2 + (y+3)^2 = 4 \text{ и } (x+2)^2 + (y+3)^2 = 4.$$

$$425. (x-5)^2 + (y \pm 5\sqrt{2})^2 = 50. \quad 426. x - 2y - 5 = 0.$$

$$427. y = 0 \text{ и } 20x - 21y = 0. \quad 428. \operatorname{tg} \alpha = 2,4. \quad 429. 5x + 2y - 7 = 0.$$

$$430. 2a = 26; 2b = 10; F_1(12; 0); F_2(-12; 0); \varepsilon = \frac{12}{13}.$$

$$431. 1) \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1; 2) \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1; 3) \frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1; 4) \frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

$$432. (\pm 5; \pm 2). \quad 433. \frac{x^2}{15} + \frac{y^2}{5} = 1.$$

$$434. A(6; 0); B\left(\frac{6}{7}; \frac{12\sqrt{3}}{7}\right); C\left(\frac{6}{7}; -\frac{12\sqrt{3}}{7}\right).$$

$$435. M_1\left(-\frac{15}{2}; \frac{3\sqrt{7}}{2}\right); M_2\left(-\frac{15}{2}; -\frac{3\sqrt{7}}{2}\right).$$

$$436. 4x + 9y - 13 = 0. \quad 437. x - 2y - 8 = 0.$$

$$438. y = 3; 12x + 7y + 51 = 0. \quad 439. 2x - y + 12 = 0.$$

$$440. \pm 3x \pm 4y + 15 = 0. \quad 441. x \pm 5 = 0. \quad 442. \frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{9} = 1.$$

$$443. \frac{x}{25} - \frac{y^2}{144} = 1. \quad 444. 120^\circ. \quad 445. 1) \frac{2}{3}\sqrt{3}; 2) \sqrt{2}.$$

$$446. \left(\pm \frac{14\sqrt{3}}{3}; \pm \frac{4\sqrt{3}}{3}\right).$$

447. 1)  $(10; 2); (-10; -2)$ ; 2) пряма дотикається до гіперболи в точці  $(10; -2)$ ; 3) точок перетину немає.

$$448. 3x - 4y - 5 = 0. \quad 449. x + y = 1.$$

450. 1)  $3x + 2y = 6$  і  $3x - 2y = 6$ ; 2)  $3x + 2y + 6 = 0$ ; 3) дотичну провести неможливо, точка розміщена не на лінії гіперболи.

$$451. \left(\frac{8\sqrt{5}}{5}; \frac{3\sqrt{15}}{5}\right) \text{ і } \left(-\frac{8\sqrt{5}}{5}; -\frac{3\sqrt{15}}{5}\right). \quad 452. \frac{x^2}{4} - y^2 = 1.$$

$$453. A^2a^2 - B^2b^2 = C^2. \quad 454. 4p\sqrt{3}. \quad 455. 2x - y - 3 = 0.$$

$$456. x + y + 2 \text{ і } 2x + 5y + 25 = 0. \quad 457. p = 2bk.$$

$$458. 1) y = 3x + 1; 2) x - 2y + 12 = 0; 3) 3x + y + 1 = 0. \quad 459. d = 2.$$

$$460. p = \frac{5}{2}. \quad 461. y = -\sqrt{3}(x + 1); \frac{16}{3}. \quad 462. x^2 - 4xy + 3y^2 + 4y = 0.$$

$$463. x^2 - 8y = 0. \quad 464. \text{Гіпербола: } \delta = -8; \Delta = 16.$$

$$465. \text{Еліпс: } \delta = 8; \Delta = -64. \quad 466. \text{Пара прямих: } \delta = -1; \Delta = 0.$$

$$467. \text{Пара прямих: } \delta = -\frac{81}{4}; \Delta = 0. \quad 468. \text{Гіпербола: } \delta = -\frac{5}{4}; \Delta = -\frac{1}{4}.$$

$$469. \text{Парабола: } \delta = 0; \Delta = -1.$$

470. Якщо  $\lambda > 1$  — еліпс; при  $\lambda = 1$  — парабола; якщо  $\lambda < 1$  — гіпербола; коли  $\lambda = -24$  — пара прямих, що перетинаються:  $x - 6y - 3 = 0$  і  $x + 4y - 1 = 0$ .

$$471. 1) x'^2 + 4y'^2 = 16; 2) x'^2 - 4y'^2 = 16. \quad 491. 2y - 3z + 7 = 0.$$

$$492. \frac{x}{4} + \frac{y}{3} + \frac{z}{2} = 1.$$

$$493. x - 2y - 3z + 14 = 0.$$

$$494. 1) 45^\circ; 2) 78^\circ 30'.$$

$$495. 2x + 3y + 4z = 3.$$

$$496. x - 2y - 3z = 4.$$

$$497. 2x - 2y + z = 2.$$

$$498. 4x - y - 14z = 0.$$

$$499. \alpha = 60^\circ.$$

$$500. 1) \frac{3}{2}; 2) 0; 3) 4.$$

$$501. 3.$$

$$502. y - 2 = 0; x + 2y + 2z - 9 = 0.$$

$$503. x + 2y - 6z + 3 = 0; 4x + y + z - 1 = 0.$$

$$504. (0; 0; 3); \left(0, 0, -\frac{5}{2}\right).$$

$$505. 4.$$

$$506. 1) 23x - 32y + 26z - 17 = 0; 2) 21x + 14z - 3 = 0; 3) 7x + 14y + 5 = 0.$$

$$507. 3x - 6y - 2z + 35 = 0 \text{ и } 3x - 6y - 2z - 7 = 0.$$

$$508. A(-1; 7; 5; 0); B(2; 0; 3); C(0; 5; 1).$$

$$509. \frac{x}{4} = \frac{z-2}{3} = \frac{y}{0}; x-4 = \frac{y}{3} = \frac{z-5}{-5}; \frac{x}{5} = \frac{y}{3} = \frac{z-2}{-2}; -x = \frac{y}{4} = \frac{z-2}{-4};$$

$$\frac{x-4}{-5} = \frac{y}{4} = \frac{z-5}{-7}; \frac{x-5}{-6} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{-2}. \quad 510. \text{Так.}$$

$$511. 1) \cos \alpha = \frac{4}{13}; \cos \beta = \frac{3}{13}; \cos \gamma = \frac{12}{13}; 2) \cos \alpha = \frac{12}{25}; \cos \beta = \frac{9}{25}; \cos \gamma = \frac{20}{25}.$$

$$512. \cos = \frac{72}{77}.$$

$$513. \frac{x}{9} = \frac{y}{5} = \frac{z+3}{1}.$$

$$514. \cos \alpha = \frac{6}{11}; \cos \beta = \frac{7}{11}; \cos \gamma = \frac{6}{11}.$$

$$515. 1) \frac{x-2}{4} = \frac{y+5}{-6} = \frac{z-3}{9}; 2) \frac{x-2}{-11} = \frac{y+5}{17} = \frac{z-3}{13}.$$

$$516. \frac{x}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z}{-3}.$$

$$517. 1) \text{Так}; 2) \text{так.}$$

$$518. \frac{x-2}{3} = \frac{x-3}{3} = \frac{z-1}{-1}.$$

$$519. \frac{x}{33} = \frac{y}{-26} = \frac{z}{27}.$$

$$520. \frac{x-4}{13} = \frac{y}{37} = \frac{z+1}{58}.$$

$$521. \frac{3}{2}\sqrt{6}.$$

$$522. \frac{4\sqrt{2}}{3}.$$

$$524. x - 2y + z + 5 = 0.$$

$$525. x + 2y - 2z = 1.$$

$$526. \frac{x}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}; 17^\circ 33'.$$

$$527. (5; 5; -2). \quad 528. (6; 4; 5).$$

$$529. (5; 5; 5). \quad 530. (3; 3; 3).$$

$$531. \frac{x-2}{-9} = \frac{y-1}{8} = \frac{z}{11}.$$

$$532. 11x - 17y - 19z + 10 = 0.$$

$$533. \frac{x+9}{7} = \frac{y+1}{4} = \frac{z}{1}.$$

$$534. 5x + 7y + 9z = 44.$$

$$535. x + y - z + 13 = 0.$$

$$536. (3; -1; 0).$$

537.  $(2; -3; 5)$ . 538.  $(2; 9; 6)$ . 539.  $\frac{(x-2)^2}{36} + \frac{(y+4)^2}{18} = 1$ .
540.  $(x-z)^2 + (y-z)^2 = 4(x-z)$ . 541.  $\frac{x^2 + y^2}{a^2} = \frac{z^2}{c^2}$ .
542.  $(0; a; 0)$ ;  $x^2 + (y-a)^2 = a^2$ . 543.  $9(x^2 + z^2) = 16y^2$ .
544.  $a\sqrt{2}$  и  $a$ . 545.  $\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ .
546.  $\begin{cases} 3x + 2z - 2y = 4; \\ 3x - 2z + 18y = 36 \end{cases}$  и  $\begin{cases} 3x + 2z + 6y = 12; \\ 3x - 2z - 6y = 12. \end{cases}$  547.  $\begin{cases} x + y = 4; \\ x - y = z \end{cases}$  и  $\begin{cases} x + y = 2z; \\ x - y = 2. \end{cases}$
548.  $\begin{cases} x + y - z = 2; \\ x - y + z = 2 \end{cases}$  и  $\begin{cases} x + y - 3z = -6; \\ -3x + 3y - z = 2. \end{cases}$  549.  $2y = \pm 3z$ .
550.  $\begin{cases} 3x + 4y = 24; \\ 3x - 4y = 12z \end{cases}$  и  $\begin{cases} z = 0; \\ 3x - 4y = 0. \end{cases}$  553.  $y = (x+1)^2$ .
564.  $u = \sqrt{1 + (\ln \sin x)^2}$ .
565. 1)  $y = \pm \sqrt{1 - x^2}$ ; 2)  $y = \frac{a}{x}$ ; 3)  $y = \frac{\log_2 5}{x}$ ; 4)  $y = \frac{e^4}{x} - 1$ ;  
5)  $y = \log_2 \frac{x^3 + 7}{x^2 - 2} - x$ ; 6)  $y = \arccos \frac{x^2}{x+1}$ .
566. 1)  $x \leq \frac{5}{2}$ ; 2)  $x \in \mathbb{R}$ ,  $x \neq \pm 1$ ; 3)  $x \in \mathbb{R}$ ,  $x \neq 1$ ,  $x \neq 2$ ; 4)  $-4 \leq x \leq 4$ ; 5)  $0 \leq x \leq 1$ ;  
6)  $-1 \leq x \leq 1$ ; 7)  $2\pi k < x < 2\pi k + \pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ; 8)  $2\pi k \leq x < (2k+1)\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ; 9)  $x > 0$ ,  
 $x \neq 1$ ; 10)  $-4 \leq x \leq -\pi$  и  $0 \leq x \leq \pi$ ; 11)  $n \in \mathbb{Z}$ ; 12)  $x \in \mathbb{R}$ .
567. 1)  $x \in (-\infty; 2) \cup (3; \infty)$ ,  $y > 0$ ,  $x \in (2; 3)$ ,  $y < 0$ ; 2)  $y > 0$ ,  
 $x \in \mathbb{R}$ ; 3)  $x \in (-\infty; -1) \cup (3; \infty)$ ,  $y > 0$ ,  $x \in (-1; 3)$ ,  $y < 0$ .
570. 1)  $\frac{2}{3}\pi$ ; 2)  $\pi$ ; 3)  $4\pi$ ; 4)  $\frac{8}{3}\pi$ . 574.  $y = -\frac{5}{9}x^2 + 5$ . 597.  $\infty$ .
598. 0. 599.  $\frac{15}{17}$ . 600. 1. 601. 0. 602. 0.
603. 0. 604. 0. 605.  $\frac{4}{3}$ . 606.  $\frac{1}{2}$ . 607.  $-\frac{1}{2}$ .
608. 1. 609. 1. 610. 0. 611.  $\frac{1}{2}$ . 612.  $\frac{1}{2}$ .
613. 0. 614.  $-\frac{2}{5}$ . 615.  $\frac{1}{2}$ . 616. 6. 617.  $\infty$ .
618. -1. 619.  $\infty$ . 620.  $\frac{m}{n}$ . 621. 0. 622.  $\infty$ .

623.  $\frac{1}{2}$ .      624.  $-1$ .      625.  $0$ .      626.  $\frac{1}{4}$ .      627.  $-1$ .  
 628.  $1$ .      629.  $0$ .      630.  $0$ .      631.  $\infty$ .      632.  $4$ .  
 633.  $\frac{1}{4}$ .      634.  $3$ .      635.  $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ .      636.  $\frac{1}{3}$ .      637.  $\frac{2}{3}$ .  
 638.  $\frac{1}{4a\sqrt{a-6}}$ .      639.  $0$ .      640.  $0$ .      641.  $0$ .      642.  $1$ .  
 643.  $\frac{1}{2}$ .      644.  $\frac{1}{2}(a+b)$ .      645.  $\frac{\alpha}{\beta}$ .      646.  $\frac{2}{5}$ .  
 647.  $0$ , якщо  $n > m$ ;  $1$ , якщо  $n = m$ ;  $\infty$ , якщо  $n < m$ .      648.  $(-1)^{m-n} \cdot \frac{m}{n}$ .  
 649.  $\frac{2}{3}$ .      650.  $\frac{1}{2}$ .      651.  $\frac{1}{3}$ .      652.  $\frac{3}{4}$ .      653.  $\infty$ .  
 654.  $-1$ .      655.  $\infty$ .      656.  $0$ .      657.  $\frac{1}{2}$ .      658.  $\infty$ .  
 659.  $\frac{\pi}{2}$ .      660.  $1$ .      661.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .      662.  $2$ .      663.  $-2$ .  
 664.  $-2 \sin a$ .      665.  $\frac{\beta^2 - \alpha^2}{2}$ .      666.  $\frac{\sin 2\beta}{2\beta}$ .      667.  $\frac{\sqrt{2}}{8}$ .  
 668.  $-\sin a$ .      669.  $1$ .      670.  $\frac{3}{2}$ .      671.  $14$ .  
 672.  $\frac{1}{\sqrt{3}}$ .      673.  $\frac{1}{e}$ .      674.  $\frac{1}{e}$ .      675.  $1$ .  
 676.  $e^{mk}$ .      677.  $e^6$ .      678.  $e^{-\frac{2}{3}}$ .      679.  $e^2$ .      680.  $\infty$ .  
 681.  $\infty$ .      682.  $1$ .      683.  $e^2$ .      684.  $e$ .      685.  $\sqrt{e}$ .  
 686.  $e^{\operatorname{ctg} a}$ .      687.  $e^{\frac{3}{2}}$ .      688.  $\frac{1}{e}$ .      689.  $1$ .      690.  $k$ .  
 691.  $\frac{1}{a}$ .      692.  $a$ .      693.  $\frac{1}{e}$ .      694.  $\ln a$ .      695.  $\frac{2}{3}$ .  
 696.  $e$ .      697.  $e^2$ .      698.  $\frac{3}{2}$ .      724. Так.  
 725. Так,  $f(1) = \frac{2}{3}$ .  
 726. У т.  $x = 0$  — ліквідний розрив; у т.  $x = \pm 1$  — розриви другого роду.  
 727. Ні.      728.  $y(0) = 0$ .      729. У т.  $x = 0$  розрив першого роду.

730. У т.  $x = 0$  розрив першого роду.

731. У т.  $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$ , де  $n \in Z$  — розриви першого роду.

732. У т.  $x = \pi n$ ,  $n \in Z$  — зліва  $y \rightarrow 1$ , праворуч  $y \rightarrow -\infty$ ; розриви другого роду.

733. У т.  $x = \frac{\pi}{2}(2k + 1)$ ,  $k \in Z$  розрив другого роду.

734. У т.  $x = 0$  розрив другого роду. 735. Ліквідовний.

736. У т.  $x = 1$  розрив першого роду. 737. Ліквідовний.

738. У т.  $x = \frac{1}{k}$ ,  $k \in Z$ ,  $k \neq 0$  — другого роду; в т.  $x = 0$  — другого роду.

739. У т.  $x = 0$ ;  $x = 1$  — другого роду. 740.  $a = 1$ . 741.  $a = -1$ ;  $b = 1$ .

742. У т.  $x = 2$  — першого роду.

743. У т.  $x = 1$  — неперервна; в т.  $x = 2,5$  — першого роду.

744. У т.  $x = -1$  — першого роду; в т.  $x = 0$  — другого роду. 745. Неперервна.

746. У т.  $x = -1$  — першого роду. 747. У т.  $x = -1$  — першого роду.

748. У т.  $x = -1$  — першого роду; в т.  $x = 1$  — другого роду.

749. У т.  $x = 2$  — першого роду. 766. 1) 4,61; 2) -0,249; 3) 0,249.

768.  $y_{\text{сер}} = 45$  гр. од.;  $y_{\text{гран}} = 35$  гр. од. 769. 43 ум. од.

770. 1)  $x = 0$ ; 2)  $x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ . 771.  $x = \pm 1$ .

772.  $\alpha_1 = \arctg \frac{1}{7}$  і  $\alpha_2 = \arctg \frac{1}{13}$ . 773.  $\arctg 3$ .

774. 1)  $x + 2y - 4 = 0$ ; 2)  $y = 2$ .

775. 1)  $y + 1 = 0$ ;  $6x + y + 4 = 0$ ; 2)  $12x + 4y + 1 = 0$ ;  $12x = 36y - 44 = 0$ ; 3)  $4x - y - 9 = 0$ ;  $4x + y + 1 = 0$ .

776.  $4x - y + 4 = 0$ ;  $12x + 9y + 4 = 0$ . 777.  $\frac{(1 + \sqrt[3]{x})^2}{\sqrt[3]{x^2}}$ . 778.  $\frac{a}{k \cos^2\left(\frac{x}{k} + b\right)}$ .

779.  $\frac{p}{2\sqrt{1 + \sqrt{2px}}\sqrt{2px}}$ . 780.  $\frac{2x - 3}{1 + (x^2 - 3x + 2)^2}$ . 781.  $\frac{1 + \sin x}{(x - \cos x)\ln 10}$ .

782.  $\frac{3}{2}\sin 2x(\cos x - 2)$ . 783.  $\sec^2 \frac{x}{5}$ . 784.  $\frac{1 + \sin x}{(x - \cos x)\ln 10}$ .

785.  $2\sin \frac{x}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}\cos \frac{x}{2}\sin 2x$ . 786.  $e^{\cos x}(\cos x - \sin^2 x)$ .

$$\begin{array}{lll}
787. \frac{x^4(7x-40)}{\sqrt[3]{(x^6-8)^2}}. & 788. e^{-x^2}\left(\frac{1}{x}-2x\ln x\right). & 789. \frac{5(x-1)}{x\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^9. \\
790. -\frac{1}{1+x^2}. & 791. 2x^2e^{2x+3}. & 792. \frac{2\sin 2x}{\cos^2 2x}. & 793. \frac{1+x^2}{1+x^2+x^4}. \\
794. -\frac{2(x\cos x+\sin x)}{x^2\sin^2 x}. & 795. \frac{1}{3}\operatorname{ctg}\frac{x}{2}\sin\frac{2x}{3}-\frac{1}{2}\sin^2\cos\operatorname{ec}^2\frac{x}{2}. & & \\
796. -\frac{4(31x^5+18)}{27x^5\sqrt[9]{(4x^5+2)^8}}. & 797. \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}. & 798. \operatorname{arctg}\sqrt{x}+\frac{\sqrt{x}}{2(1+x)}. & \\
799. \frac{\operatorname{tg} x(1+2\operatorname{tg}^2 x)}{\cos^2 x\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{tg}^4 x}}. & 800. \frac{\cos 2x}{x}-2\sin 2x\ln x. & 801. \frac{1+x^4}{1+x^6}. & \\
802. \frac{n\cos x}{\sqrt{1-n^2\sin^2 x}}. & 803. \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x-\sin^2 x}}. & 804. \sin^5 3x\cos^3 3x. & \\
805. \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}. & 806. -\frac{1}{2}\sin\frac{\arcsin x}{2}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. & & \\
807. \frac{1+2\sqrt{x}+4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}}{8\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}. & 808. \frac{3}{2\sqrt{3x-9x^2}}. & & \\
809. \frac{\ln x-2}{x^2}\sin\left[2\left(\frac{1-\ln x}{x}\right)\right]. & 810. \frac{2x-\cos x}{(x^2-\sin x)\ln 3}. & & \\
811. -\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}. & 812. -\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)}. & & \\
813. \arcsin(\ln x)+\frac{1}{\sqrt{1-\ln^2 x}}. & 814. -\frac{2e^x}{(1+e^x)^2}\sec^2\left(\frac{1-e^x}{1+e^x}\right). & & \\
815. -\frac{2\sin^3 x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}. & 816. -0,8\left(\cos\frac{2x+1}{2}-\sin 0,8x\right)\left(\sin\frac{2x+1}{2}+0,8\cos 0,8x\right). & & \\
817. 10^{\sqrt{x}}\left(1+\frac{\sqrt{x}}{2}\ln 10\right). & 818. -\frac{4}{\operatorname{tg} 2x\sin^2 2x}. & & \\
819. -\frac{1}{(x^2+2x+2)\operatorname{arctg}\frac{1}{1+x}}. & 820. -\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}. & & \\
821. \frac{x+2}{2\sqrt{x+3}\sqrt[3]{(1+x)}\sqrt{x+3}}. & 822. \frac{x(8+9)\sqrt{x}}{4\sqrt{1+\sqrt{x}}}. & & 
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
823. -\frac{\sin 2x}{2\sqrt{(1+\sin^2 x)^3}}. & 824. 3x^2 \operatorname{arctg} x^3 + \frac{3x^5}{1+x^6}. \\
825. \frac{\operatorname{ctg} x \ln \cos x + \operatorname{tg} x \ln \sin x}{\ln^2 \cos x}. & 826. \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}. \\
827. \frac{4}{(1-4x)^2} \left( \sqrt{\frac{1-4x}{1+4x}} + \operatorname{arcsin} 4x \right). & 828. -\frac{e^{\frac{1}{\ln x}}}{x \ln^2 x}. \quad 829. \frac{1}{e^x - 1}. \\
830. 10^{x \operatorname{tg} x} \ln 10 \left( \operatorname{tg} x + \frac{x}{\cos^2 x} \right). & 831. 2 \sin x (x \sin x \cos x^2 + \cos x \sin x^2). \\
832. \frac{2 \sin x}{\cos 2x \sqrt{\cos 2x}}. & 833. \frac{2-3x-x^3}{2(1-x)(1+x^2)} \sqrt{\frac{1-x}{1+x^2}}. \quad 834. \frac{x^2}{1-x^4}. \\
835. 2^{\frac{x}{\ln x}} \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x} \ln 2. & 836. \sqrt{\frac{a-x}{x-b}}. \quad 837. -\frac{2(2 \cos^2 x + 1)}{\sin^2 2x}. \\
838. -\frac{1}{(1+x)\sqrt{1-x^2}} e^{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}. & 839. \sqrt{\frac{a-x}{a+x}}. \quad 840. \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}. \\
841. -\cos 2x. & 842. \frac{x^2}{\sqrt{(x^2-1)^3}}. \quad 843. (a^2+1) \sin x e^{ax}. \\
844. e^{1-\cos x} (1+x \sin x). & 845. \frac{2e^{-2x}}{(1+e^{-4x})(\operatorname{arctg} e^{-2x})}. \quad 846. 10e^x \sin 3x. \\
847. 9x^2 \operatorname{arcsin} x. & 848. \frac{e^{-\sqrt{x}}}{4\sqrt{x} \sqrt{(1+e^{-\sqrt{x}})^3}}. \quad 849. \frac{x}{\sqrt{2+4x-x^2}}. \\
850. \frac{(\cos x - \sin x)(e^x + e^{-x})}{e^x \cos x + e^{-x} \sin x}. & 851. \frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}. \quad 852. \frac{\sin(x - \cos x)(1 + \sin x)}{\cos^2(x - \cos x)}. \\
853. e^x \sin x \cos^3 x (1 + \operatorname{ctg} x - 3 \operatorname{tg} x). & 854. \frac{54\sqrt[5]{x^4}}{55^{11} \sqrt[11]{(9+6\sqrt[5]{x^9})^{10}}}. \\
855. \frac{1}{\sqrt{e^{2x} + 4e^x + 1}}. & 856. \frac{e^{\operatorname{arctg} \sqrt{1+\ln(2x+3)}}}{(2x+3)[2+\ln(2x+3)]\sqrt{1+\ln(2x+3)}}. \\
857. \frac{e^{x^2}}{(e^x + e^{-x})^2} [2x(e^x + e^{-x}) - (e^x - e^{-x})]. & 858. \frac{\ln(1+\sin x)}{\sin^2 x}.
\end{array}$$

859.  $\frac{40}{2x - 3\sqrt{1 - 4x^2}}$ . 860.  $\frac{x^5 + 1}{x^4(x^2 + 1)}$ . 861.  $\frac{x^2}{\sqrt{1 - 2x - x^2}}$ .
862.  $\frac{1}{x} - \frac{x}{1 - x^2} + \operatorname{ctg} x$ . 863.  $\frac{(1 + 2x^2)\sin x + x(1 + x^2)\cos x}{\sqrt{1 + x^2}}$ .
864.  $\frac{(x^2 - 32x - 73)(3 - x)^8}{2(x + 1)^6\sqrt{x + 2}}$ . 865.  $\frac{3e^{\sqrt{x}}(2 + \sqrt{x})}{10^5\sqrt{(1 + xe^{\sqrt{x}})^2}}$ .
866.  $\left(2x - \frac{1}{1 + x^2}\right) \frac{e^{x^2 - \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}\ln x + 1}}{\sqrt{x}}$ . 867.  $\frac{1}{\cos^5 x}$ .
868.  $\frac{e^x \operatorname{arctg} x}{\ln^5 x} \left[1 + x + \left(\frac{x}{(1 + x^2)\operatorname{arctg} x} - \frac{5}{\ln x}\right)\right]$ .
869.  $\frac{(1 - x^2)e^{3x-1}\cos x}{(\arccos x)^3} \left[\frac{3 - 2x - 3x^2}{1 - x^2} - \operatorname{tg} x + \frac{3}{\sqrt{1 - x^2}\arccos x}\right]$ .
870.  $4\sqrt{(x^2 + a^2)^3}$ . 871.  $(\arcsin x)^2$ . 872.  $\frac{e^{-x} - e^x}{e^{-x} + e^x}$ .
873.  $\frac{1}{ae^{mx} + be^{-mx}}$ . 874.  $\frac{1}{x^3 + 1}$ . 875.  $\frac{1}{x}\sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}}$ .
876.  $(\operatorname{tg} 2x)^{\operatorname{ctg} \frac{x}{2}} \left(\frac{4\operatorname{ctg} \frac{x}{2}}{\sin 4x} - \frac{\ln \operatorname{tg} 2x}{2\sin^2 \frac{x}{2}}\right)$ .
877.  $\frac{3x^2 + 10x + 20}{15(x^2 + 4)\sqrt[3]{(x - 5)^2}\sqrt{x^2 + 4}}$ . 878.  $\frac{1}{x^4 + x^2 + 1}$ .
879.  $-\frac{2nx^{n-1}}{x^{2n} + 1}$ , якщо  $n$  — парне число, і  $-\frac{2nx^n}{|x|(x^{2n} + 1)}$ , якщо  $n$  — непарне число.
880.  $\frac{24x^3}{(1 + 8x^3)^2}$ . 884.  $x^{x^2+1}(2\ln x + 1)$ . 885.  $x^{x^x} x^x \left(\ln^2 x + \ln x + \frac{1}{x}\right)$ .
886.  $(\sin x)^{\cos x} \left(\frac{\cos^2 x}{\sin x} - \sin x \ln \sin x\right)$ . 887.  $(\ln x)^n \left(\frac{1}{\ln x} + \ln \ln x\right)$ .
888.  $2\sqrt{(x + 1)^2} \left(\frac{1}{x(x + 1)} - \frac{\ln(x + 1)}{x^2}\right)$ . 889.  $x^2 e^{x^2} \sin 2x(3 + 2x^2 + 2x \operatorname{ctg} 2x)$ .

$$\begin{array}{ll}
890. -\frac{2(x-2)(x^2+11x+1)}{3(x-5)^4\sqrt[3]{(x+1)^2}}. & 891. 2x^{\ln x-1} \ln x. \\
892. \frac{57x^2-302x+361}{20(x-2)(x-3)} \cdot \frac{(x+1)^2 \cdot \sqrt[4]{x-2}}{\sqrt[5]{(x-3)^2}}. & \\
893. \frac{1}{2} \sqrt{x \sin x \sqrt{1-e^x}} \left( \frac{1}{x} + \operatorname{ctg} x - \frac{e^x}{2(1-e^x)} \right). & \\
894. \frac{1}{\sqrt{1-x^2}(\arcsin^2 x - 1)} \sqrt{\frac{1-\arcsin x}{1+\arcsin x}}. & 895. x^{\frac{1}{x}-2} (1-\ln x). \\
896. x^{\sin x} \left( \cos x \ln x + \frac{\sin x}{x} \right). & 897. \left( \frac{x}{x+1} \right)^x \left( \frac{1}{x+1} + \ln \frac{x}{x+1} \right). \\
898. x^{\sqrt{x}-\frac{1}{2}} (2+\ln x). & 899. (x^2+1)^{\sin x} \left( \frac{2x \sin x}{x^2+1} + \cos x \ln(x^2+1) \right). \\
900. \frac{x^4+6x^2+1}{3x(1-x^4)} \sqrt[3]{\frac{x(x^2+1)}{(x^2-1)^2}}. & 901. -\frac{b^2 x}{a^2 y}. \quad 902. -\sqrt{\frac{y}{x}}. \\
903. \frac{ay-x^2}{y^2-ax}. & 904. \frac{3a^2 \cos 3x + y^2 \sin x}{2y \cos x}. \quad 905. \frac{2a}{3(1-y^2)}. \\
906. \frac{y}{y-x}. & 907. \frac{x}{y} \cdot \frac{y^2-2x^2}{2y^2-x^3}. \quad 908. -\frac{3x^2+2axy+by^2}{ax^2+2bxy+3y^2}. \\
909. -\frac{y \cos^2(x+y)(\cos(xy)-\sin(xy))-1}{x \cos^2(x+y)(\cos(xy)-\sin(xy))-1}. & 910. 2^{x-y} \frac{2y-1}{1-2x}. \\
911. \frac{1}{2(1+\ln y)}. & 912. \frac{\sqrt{1-y^2} \left( 1-\sqrt{1-x^2} \right)}{\sqrt{1-x^2} \left( 1-\sqrt{1-y^2} \right)}. \quad 913. \frac{y^2-xy \ln y}{x^2-xy \ln x}. \\
914. -\frac{\sin(x+y)}{1+\sin(x+y)}. & 915. -\frac{1+y \sin(xy)}{x \sin(xy)}. \quad 916. -3\sqrt[3]{\frac{y}{x}}. \\
917. \frac{e^y}{2-y}. & 918. \frac{\sin y}{2 \sin 2y - \sin y - x \cos y}. \quad 919. \frac{\sqrt{1-k^2}}{1+k \cos x}. \\
920. \frac{y \cos x + \sin(x-y)}{\sin(x-y) - \sin x}. & 921. \frac{1+y^2}{y^2}. \quad 922. -\frac{b}{a} \operatorname{ctg} \varphi. \\
923. -\frac{b}{a} \operatorname{tg} \varphi. & 924. \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}. \quad 925. \frac{3t^2-1}{2t}.
\end{array}$$

926.  $-1$ .      927.  $\frac{t}{2}$ .      928.  $\frac{\cos - \sin}{1 - \sin - \cos}$ .      929.  $\frac{1+t^2}{t(2+3t-t^2)}$ .
930.  $\frac{1 - \operatorname{tg} t}{1 + \operatorname{tg} t}$ .      931.  $\frac{t(2-t^3)}{1-2t^3}$ .      934.  $6 \frac{x-2}{x-6}$ .      935.  $\frac{x\sqrt{x}+1}{x+2\sqrt{x}}$ .
936.  $\frac{x(1-\cos x)}{x-\sin x}$ .      937.  $-\frac{x \sin x + 2 \cos x}{\cos x}$ .      938.  $\frac{4x - \sin 2x}{\sin 2x}$ .
939.  $\frac{2-3x^2}{1-x^2}$ .      940.  $\frac{\sin 2x - x}{x^2 \operatorname{tg} x}$ .      941.  $\frac{x(2x+3^x \ln 3)}{x^2+3^x}$ .      942.  $2+x$ .
943.  $\frac{2xe^x}{1-e^{2x}}$ .      944.  $\frac{\ln x + 1}{\ln x}$ .      945.  $\frac{2(x+1)}{(x+2)\ln(x^2+2x)}$ .      946.  $x \cos x$ .
947.  $\frac{x(x-1)^2}{(x^2+1)(x-\ln(x^2+1))}$ .      948.  $\frac{x}{\sqrt{4+x^2} \cdot \ln x + \sqrt{4+x^2}}$ .
949.  $\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{1-x} \arcsin \sqrt{x}}$ .      950.  $\frac{2x^2}{\sqrt{1-(1-x^2)^2} \arccos(1-x^2)}$ .
951.  $\frac{2x^2+1}{(1+x^2)(x \operatorname{arctg} x - 1)}$ .      952.  $\left[ (2x+4)(x^2-\sqrt{x}) + (x^2-4x+1) \left( 2x - \frac{2}{2\sqrt{x}} \right) \right] dx$ .
953.  $-\frac{6x^2 dx}{(x^8-1)}$ .      954.  $\frac{2tdt}{(1-t^2)^2}$ .      955.  $3(1+x-x^2)^2(1-2x)dx$ .
956.  $\frac{2 \operatorname{tg} x}{\cos^2 x} dx$ .      957.  $5^{\ln \operatorname{tg} x} \frac{2 \ln 5}{\sin 2x} dx$ .      958.  $-2 \frac{1}{\cos x} \ln 2 \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx$ .
959.  $-\frac{dx}{2 \sin \frac{x}{2}}$ .      960.  $\frac{(x^2-1) \sin x + 2x \cos x}{(1-x^2)^2} dx$ .
961.  $\left( \frac{1}{2\sqrt{\arcsin x} \sqrt{1-x^2}} + \frac{2 \operatorname{arctg} x}{1+x^2} \right) dx$ .      962.  $\left( \frac{5}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{1+x^2} \right) \frac{dx}{2}$ .
963.  $\left( 3 \frac{1}{x^2} \cdot \frac{2}{x^3} \cdot \ln 3 + 9x^2 - \frac{2}{\sqrt{x}} \right) dx$ .      964. 1)  $-0,0059$ ; 2)  $-0,0075$ ; 3)  $0,0086$ .
965.  $\Delta y \approx 0,00025 : \sin 30^\circ 1' \approx 0,50025$ .      978.  $-24x$ .      979.  $207 \ 360$ .
980.  $360$ .      981.  $6(5x^4+6x^2+1)$ .      982.  $4 \sin 2x$ .      983.  $\frac{4}{3}$ .
984.  $-\frac{1}{2}$ .      985.  $\frac{5!}{(1-x)^6}$ .      986.  $\frac{6}{x}$ .      987.  $\frac{an(n+1)}{x^{n+2}}$ .

988.  $16a \sin 2\varphi$ .      989.  $\frac{2(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$ .      990.  $2e^{x^2}(3x+2x^3)$ .
991.  $\frac{6x(2x^3-1)}{(x^3+1)^3}$ .      992.  $\frac{2x}{1+x^2} + \operatorname{arctg} x$ .      993.  $-\frac{a^2}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}$ .
994.  $-\frac{x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$ .      995.  $\frac{a+3\sqrt{x}}{4x\sqrt{x}(a+\sqrt{x})^3}$ .      996.  $\frac{e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)}{4x\sqrt{x}}$ .
997.  $-\frac{\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$ .      998.  $\frac{a(a^2-1)\sin x}{\sqrt{(1-a^2\sin^2 x)^3}}$ .      999.  $x^2 \left[ (\ln x + 1)^2 + \frac{1}{x} \right]$ .
1000.  $a^n e^{ax}$ .      1001.  $\sin \left( x + \frac{\pi}{2} n \right)$ .      1002.  $\cos \left( x + \frac{\pi}{2} n \right)$ .
1003.  $2^{n-1} \sin \left( 2x + (n-1)\frac{\pi}{2} \right)$ .      1004.  $e^x(x+n)$ .      1005.  $\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^4}$ .
1006.  $(-1)^n \frac{(n-2)!}{x^{n-1}}, n \geq 2$ .      1007.  $a^n \sin \left( ax + n\frac{\pi}{2} \right) + b^n \cos \left( bx + n\frac{\pi}{2} \right)$ .
1008.  $\frac{(-1)^n a^n n!}{(ax+b)^{n+1}}$ .      1009.  $(-1)^n \frac{n!}{2} \left( \frac{1}{(x+1)^{n+1}} + \frac{1}{(x-1)^{n+1}} \right)$ .
1010.  $(x^2-379)\sin x - 40x \cos x$ .      1011.  $e^x(x^3+33x^2+330x+990)$ .
1012.  $e^x \sum_{k=0}^{30} C_{30}^k \sin \left( x + k\frac{\pi}{2} \right)$ .
1013.  $2^n x^3 \sin \left( 2x + n\frac{\pi}{2} \right) + 3n 2^{n-1} x^2 \sin \left( 2x + (n-1)\frac{\pi}{2} \right) + 3n(n-1) 2^{n-2} x \times$   
 $\times \sin \left( 2x + (n-2)\frac{\pi}{2} \right) + 3n(n-1) 2^{n-2} x \sin \left( 2x + (n-2)\frac{\pi}{2} \right) + n(n-1)(n-2) 2^{n-3} \times$   
 $\times \sin \left( 2x + (n-3)\frac{\pi}{2} \right)$ .
1045.  $(-\infty; 0) \cup \left( \frac{a}{2}; a \right)$  — спадає,  $\left( 0; \frac{a}{2} \right) \cup (a; \infty)$  — зростає.
1046.  $(-\infty; -a) \cup (a; \infty)$  — зростає,  $(-a, 0) \cup (0; a)$  — спадає.
1047.  $(-\sqrt{2}; -1) \cup (1; \sqrt{2})$  — спадає;  $(-1; 1)$  — зростає.
1048.  $\left( -\infty, -\frac{1}{2} \right)$  — зростає,  $\left( -\frac{1}{2}, \frac{11}{18} \right)$  — спадає,  $\left( \frac{11}{18}, \infty \right)$  — зростає.

1049.  $\left(-\infty, \frac{2}{3}a\right)$  — зростає,  $\left(\frac{2}{3}a, a\right)$  — спадає,  $(a, \infty)$  — зростає.
1050.  $(-\infty, -1)$  — зростає,  $(-1, 1)$  — спадає,  $(1, \infty)$  — зростає.
1051.  $(-\infty, 0)$  — спадає,  $(-1, 1)$  — спадає,  $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$  — зростає,  $(1, \infty)$  — спадає.
1052.  $(-\infty, 0)$  — зростає,  $(0, \infty)$  — спадає.
1053.  $(-\infty, 0)$  — спадає,  $(0, 2)$  — зростає,  $(2, \infty)$  — спадає.
1054.  $(0, 1)$  — спадає,  $(1, e)$  — спадає,  $(e, \infty)$  — зростає.
1055.  $\left(0, \frac{1}{2}\right)$  — спадає,  $\left(\frac{1}{2}, \infty\right)$  — зростає.
1056.  $\left(0, \frac{\pi}{3}\right)$  — спадає,  $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right)$  — зростає,  $\left(\frac{5\pi}{3}, 2\pi\right)$  — спадає.
1057.  $\left(0, \frac{\pi}{6}\right)$  — зростає,  $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right)$  — спадає,  $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}\right)$  — зростає,  $\left(\frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}\right)$  — спадає,  $\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$  — зростає.
1058. Монотонно зростає. 1059. Монотонно зростає.
1060.  $\left(0, \frac{3}{4}a\right)$  — зростає,  $\left(\frac{3}{4}a, a\right)$  — спадає.
1061.  $y_{\min} = -1$  при  $x = 1$ ;  $y_{\max} = 0$  при  $x = 0$ .
1062.  $y_{\max} = 17$  при  $x = -1$ ;  $y_{\min} = -47$  при  $x = 3$ .
1063.  $y_{\max} = 4$  при  $x = 0$ ;  $y_{\min} = \frac{8}{3}$  при  $x = -2$ .
1064.  $y_{\max} = 2$  при  $x = 0$ ;  $y_{\min} = \sqrt[3]{4}$  при  $x = 2$ .
1065.  $y_{\max} = \frac{1}{\ln 3}$  при  $x = -3$ . 1066.  $y_{\max} = 0$  при  $x = 0$ .
1067.  $y_{\max} = 0$  при  $x = 0$ ;  $y_{\min} = -\frac{2}{3}$  при  $x = 1$ .
1068.  $y_{\min} = 2$  при  $x = \frac{2}{3}$ . 1069.  $y_{\max} = \frac{\sqrt{205}}{10}$  при  $x = \frac{12}{5}$ .
1070.  $y_{\max} = \sqrt[3]{a^4}$  при  $x = 0$ ;  $y_{\min} = 0$  при  $x = \pm a$ .
1071.  $y_{\min} = 0$  при  $x = 0$ . 1072. Монотонно зростає.
1073.  $y_{\max} = \frac{81}{8}\sqrt[3]{18}$  при  $x = \frac{1}{2}$ ;  $y_{\min} = 0$  при  $x = -1$  і при  $x = 5$ .

$$1074. y_{\max} = 2,5 \text{ при } x=1; y_{\min} = \frac{e(4-e)}{2} \approx 1,7 \text{ при } x=e.$$

$$1075. y_{\max} = \frac{1}{2} \text{ при } x=0; y_{\min} = \frac{\pi}{8} \text{ при } x=1.$$

$$1076. y_{\max} = 0 \text{ при } x=0; y_{\min} = \frac{3\sqrt{3}-2\pi}{48} \text{ при } x=\frac{1}{2}.$$

$$1077. y_{\max} = \frac{6\pi\sqrt{3}-\pi^2+18}{36} \approx 1,13 \text{ при } x=\pm\frac{\pi}{3}; y_{\min} = 1 \text{ при } x=0.$$

$$1078. y_{\max} = \sin \frac{1}{2} + \frac{1}{16} \text{ при } x=\frac{1}{2}; y_{\min} = \frac{36\sqrt{3}-12\pi\sqrt{3}+72-\pi^2+6\pi}{144} \text{ при } x=\frac{\pi}{6}.$$

$$1079. y_{\max} = \frac{1}{\pi} \text{ при } x=1; y_{\min} = -\frac{1}{\pi} \text{ при } x=3.$$

$$1080. \text{ Якщо } ab \leq 0, \text{ то екстремумів немає. Якщо } ab > 0 \text{ і } a > 0, \text{ то } y_{\min} = 2\sqrt{ab} \text{ при } x = \frac{1}{2p} \ln \frac{b}{a}; \text{ якщо } ab > 0 \text{ і } a < 0, \text{ то } y_{\max} = -2\sqrt{ab} \text{ при } x = \frac{1}{2p} \ln \frac{b}{a}.$$

$$1081. 13 \text{ і } 4. \quad 1082. 8 \text{ і } 0. \quad 1083. 2 \text{ і } -10. \quad 1084. 2 \text{ і } -12.$$

$$1085. 10 \text{ і } 6. \quad 1086. 1 \text{ і } \frac{3}{5}. \quad 1087. \frac{3}{5} \text{ і } -1.$$

$$1088. \text{ Найменше значення дорівнює } (a+b)^2, \text{ найбільшого немає.}$$

$$1089. \frac{\pi}{2} \text{ і } -\frac{\pi}{2}.$$

$$1090. \text{ Найбільше значення дорівнює } 1, \text{ найменшого немає.}$$

$$1091. \text{ Найменше значення дорівнює } \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}, \text{ найбільшого немає.}$$

$$1092. \sqrt[3]{9}. \quad 1093. \frac{\pi}{4} \text{ і } 0.$$

$$1094. \text{ Відстань від хорди до точки } A \text{ дорівнює } \frac{3}{4} \text{ діаметра кола.}$$

$$1095. \frac{4R\sqrt{5}}{5} \text{ і } \frac{R\sqrt{5}}{5}.$$

$$1096. \text{ Висота прямокутника дорівнює } \frac{\sqrt{8R^2+h^2}-3h}{4}, \text{ де } h \text{ — відстань від центра хорди, що стягує дугу сегмента, } R \text{ — радіус кола.}$$

$$1097. r = 1,5R, \text{ де } r \text{ — радіус основи конуса, } R \text{ — радіус основи циліндра.}$$

1098.  $\approx 49^\circ$ .      1099.  $60^\circ$ .      1100.  $4R$ .      1101.  $\frac{4}{3}R$ .
1102.  $\frac{x}{3} + \frac{y}{6} = 1$ .      1103.  $a\sqrt{2}, b\sqrt{2}$ .      1104.  $(2; 3)$ .      1105.  $C(-\sqrt{6}; -\sqrt{6})$ .
1106.  $\left(\frac{5}{3}; -\frac{250}{27}\right); \left(-\infty; \frac{5}{3}\right)$  — опуклий,  $\left(\frac{5}{3}, \infty\right)$  — угнутий.
1107. Точок перегину немає, графік угнутий.
1108.  $(2; 62)$  і  $(4; 206)$ ;  $(-\infty; 2)$  — угнутий,  $(2; 4)$  — опуклий,  $(4; \infty)$  — угнутий.
1109.  $(-3; 294)$  і  $(2; 114)$ ;  $(-\infty; -3)$  — опуклий,  $(-3; 2)$  — угнутий,  $(2; \infty)$  — опуклий.
1110.  $(1; -1)$ ;  $(-\infty; 1)$  — опуклий,  $(1; \infty)$  — угнутий.
1111. Точок перегину немає, графік угнутий.
1112.  $\left(-3a, -\frac{9a}{4}\right), (0; 0), \left(3a, \frac{9a}{4}\right); (-\infty; 3a)$  — угнутий,  $(-3a; 0)$  — опуклий,  $(3a; \infty)$  — опуклий.
1113.  $(a; 6)$ ;  $(-\infty; b)$  — опуклий,  $(b; \infty)$  — угнутий.
1114.  $\left(\arcsin \frac{\sqrt{5}-1}{2}; e^{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\right); \left(-\frac{\pi}{2}, \arcsin \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$  — угнутий,  $\left(\arcsin \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$  — опуклий.
1115.  $(\pm 1; \ln 2)$ ;  $(-\infty, -1)$  — опуклий,  $(-1; 1)$  — угнутий,  $(1; \infty)$  — опуклий.
1116.  $\left(ae^{\frac{3}{2}}, \frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}}\right); \left(0; ae^{\frac{3}{2}}\right)$  — опуклий,  $\left(ae^{\frac{3}{2}}; \infty\right)$  — угнутий.
1117. Точок перегину немає. Графік угнутий.
1118.  $\left(\frac{1}{2}; e^{\arctg \frac{1}{2}}\right); \left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$  — угнутий,  $\left(\frac{1}{2}; \infty\right)$  — опуклий.
1119.  $(1; 7)$ ;  $(0; 1)$  — опуклий,  $(1; \infty)$  — угнутий.      1121.  $a = -\frac{3}{2}$ ;  $b = \frac{9}{2}$ .
1122.  $\alpha = -\frac{20}{3}$ ;  $\beta = \frac{4}{3}$ , а також точки  $(-2; -2,5)$ ,  $(0; 0)$ .
1123.  $a \leq -\frac{e}{6}$  і при  $a > 0$ .      1124.  $y = \pm \frac{b}{a}x$ .      1125.  $x = 0$ ;  $y = 0$ .
1126.  $y = 0$ .      1127.  $x = 6$ ;  $y = C$ .      1128.  $x = -1$ ;  $y = \frac{1}{2}x - 1$ .
1129.  $x + y = 0$ .      1130.  $y = x + 2$ .      1131.  $y = \pm x$ .
1132.  $x = 0$ ;  $y = 0$ ;  $x + y = 0$ .      1133.  $x = b$ ;  $x = 2b$ ;  $y = x + 3(b - a)$ .

1134.  $y+1=0$ ;  $2x+y+1=0$ .      1135.  $x=-\frac{1}{e}$ ;  $y=x+\frac{1}{e}$ .

1136.  $x=0$ ;  $y=x$ .      1137.  $x=0$ ;  $y=x+3$ .

1138.  $y=\frac{\pi}{2}x-1$ .      1139.  $y=2x\pm\frac{\pi}{2}$ .

1140. Визначена всюди. Графік симетричний відносно початку координат.

$y_{\max}=\frac{1}{2}$  при  $x=1$ ;  $y_{\min}=-\frac{1}{2}$  при  $x=-1$ . Точки перегину графіка

$\left(-\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ ,  $(0, 0)$  і  $\left(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ . Асимптота:  $y=0$ .

1141. Визначена всюди, крім значень  $x=\pm 1$ . Графік симетричний відносно осі ординат. Максимумів немає.  $y_{\min}=1$  при  $x=0$ . Точок перегину немає. Асимптоти:  $x=\pm 1$ ,  $y=0$ .

1142. Визначена всюди, крім значень  $x=\pm 1$ . Графік симетричний відносно початку координат. Екстремумів немає. Точка перегину  $(0, 0)$ . Асимптоти:  $x=-1$ ,  $x=1$ ,  $x=0$ .

1143. Визначена всюди, крім значень  $x=1$ ,  $x=2$  і  $x=3$ .  $y_{\min}\approx -2,60$  при  $x\approx 2,58$ ;  $y_{\max}\approx 2,60$  при  $x\approx 1,42$ . Точок перегину немає. Асимптоти:  $x=1$ ,  $x=2$ ,  $x=3$ ,  $y=0$ .

1144. Невизначена при  $x=\pm 1$ . Графік симетричний відносно осі ординат.  $y_{\max}=0$  при  $x=0$ . Мінімумів немає. При  $x<-1$  зростає, при  $x>1$  спадає. Графік не має точок перегину. Асимптоти:  $x=\pm 1$ ,  $y=1$ .

1145. Визначена всюди, графік симетричний відносно осі ординат.  $y_{\min}=-1$  при  $x=0$ ;  $(1, 0)$  і  $(-1, 0)$  — точки дотику графіка з горизонтальною дотичною;  $\left(\pm\frac{\sqrt{5}}{5}, -\frac{64}{125}\right)$  — точки перегину. Асимптот немає.

1146. Визначена всюди; графік симетричний відносно осі ординат.  $y_{\max}=0$  при  $x=0$ ;  $y_{\min}=-\frac{27}{8}$  при  $x=\pm\frac{1}{2}$ . Точки дотику графіка з горизонтальною дотичною  $(\pm 1, 0)$ . При  $x\approx\pm 0,7$  та  $x\approx\pm 0,26$  — точки перегину графіка. Асимптот немає.

1147. Визначена всюди, крім  $x=0$ .  $y_{\min}=3$  при  $x=\frac{1}{2}$ . Максимумів немає.

Точка перегину графіка  $\left(-\frac{\sqrt[3]{2}}{2}, 0\right)$ . Асимптота:  $x=0$ .

**1148.** Визначена всюди, крім  $x = 0$ . Графік симетричний відносно осі ординат.  $y_{\min} = 2$  при  $x = \pm 1$ . Максимумів немає. Графік не має точок перегину. Асимптота:  $x = 0$ .

**1149.** Визначена всюди, крім  $x = 1$ .  $y_{\min} = -1$  при  $x = 0$ . Максимумів немає.

Точка перегину графіка  $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{8}{9}\right)$ . Асимптоти:  $x = 1$  і  $y = 0$ .

**1150.** Визначена всюди, крім  $x = \pm\sqrt{3}$ . Графік симетричний відносно початку координат.  $y_{\max} = -4,5$  при  $x = 3$ ;  $y_{\min} = 4,5$  при  $x = -3$ . Точка перегину графіка  $(0, 0)$ . Асимптоти:  $x = \pm\sqrt{3}$  і  $x + y = 0$ .

**1151.** Визначена всюди, крім  $x = -1$ . Мінімумів немає.  $y_{\max} = -3\frac{3}{8}$  при  $x = -3$ .

Точка перегину графіка  $(0, 0)$ . Асимптоти:  $x = -1$  і  $y = \frac{1}{2}x - 1$ .

**1152.** Визначена всюди, крім  $x = 1$ . Максимумів немає.  $y_{\min} = \frac{27}{4}$  при  $x = \frac{3}{2}$ . Точка перегину графіка  $(0, 0)$ . Асимптота:  $x = 1$ .

**1153.** Визначена всюди, крім  $x = 1$ .  $y_{\max} = 0$  при  $x = 0$ ;  $y_{\min} = \frac{4}{3}\sqrt[3]{4}$  при  $x = \sqrt[3]{4}$ . Точка перегину графіка  $\left(-\sqrt[3]{2}, -\frac{2}{3}\sqrt[3]{2}\right)$ . Асимптоти:  $x = 1$  і  $y = x$ .

**1154.** Визначена всюди, крім  $x = -1$ .  $y_{\max} = \frac{2}{27}$  при  $x = 5$ ;  $y_{\min} = 0$  при  $x = 1$ . Абсциси точок перегину графіка  $5 \pm 2\sqrt{3}$ . Асимптоти:  $x = 1$  і  $y = 0$ .

**1155.** Визначена всюди, крім  $x = 0$ .  $y_{\max} = \frac{7}{2}$  при  $x = 1$ ;  $y_{\max} = -\frac{11}{6}$  при  $x = -3$ ;  $y_{\min} = \frac{27}{8}$  при  $x = 2$ . Абсциса точки перегину графіка  $\frac{9}{7}$ . Асимптоти:  $x = 0$  і  $y = \frac{1}{2}x + 1$ .

**1156.** Визначена всюди, крім  $x = 0$ . Максимумів немає.  $y_{\min} \approx -0,28$  при  $x \approx 1,46$ . Абсциса точки перегину графіка  $-\sqrt[3]{2}$ . Асимптота:  $x = 0$ .

**1157.** Визначена всюди, крім  $x = 0$ .  $y_{\max} = -2,5$  при  $x = -2$ ; мінімумів немає. Графік не має точок перегину. Асимптоти:  $x = 0$  і  $y = x$ .

**1158.** Визначена всюди.  $y_{\max} = \frac{1}{e}$  при  $x = 1$ . Мінімумів немає. Точка перегину графіка  $\left(2, \frac{2}{e^2}\right)$ . Асимптота:  $y = 0$ .

**1159.** Визначена всюди.  $y_{\max} = \frac{4}{e^2}$  при  $x = 2$ ;  $y_{\min} = 0$  при  $x = 0$ . Абсциси точок перегину графіка  $2 \pm \sqrt{2}$ . Асимптота:  $y = 2$ .

**1160.** Визначена всюди, крім  $x = 0$ .  $y_{\min} = e$  при  $x = 1$ . Максимумів немає. Графік не має точок перегину. Асимптоти:  $x = 0$ ,  $y = 0$ .

**1161.** Визначена при  $x > -1$ .  $y_{\min} = 0$  при  $x = 0$ . Максимумів немає. Графік не має точок перегину. Асимптота:  $x = -1$ .

**1162.** Визначена всюди. Графік симетричний відносно осі ординат.  $y_{\min} = 0$  при  $x = 0$ . Максимумів немає. Точки перегину графіка  $(\pm 1, \ln 2)$ . Асимптот немає.

**1163.** Визначена всюди. Графік симетричний відносно осі ординат.  $y_{\max} = \frac{1}{e}$  при  $x = \pm 1$ ;  $y_{\min} = 0$  при  $x = 0$ . Абсциси точок перегину графіка  $\pm \frac{\sqrt{5 \pm \sqrt{17}}}{2}$ . Асимптота:  $y = 0$ .

**1164.** Визначена всюди.  $y_{\max} = \frac{27}{e^3}$  при  $x = 3$ . Мінімумів немає. Абсциси точок перегину  $0$  і  $3 \pm \sqrt{3}$ . Асимптота:  $y = 0$ .

**1165.** Визначена всюди. Графік симетричний відносно початку координат.

$y_{\max} = \frac{1}{\sqrt{e}}$  при  $x = 1$ ;  $y_{\min} = -\frac{1}{\sqrt{e}}$  при  $x = -1$ . Точки перегину графіка  $(0, 0)$ ,

$\left(\sqrt{3}, \sqrt{3}e^{-\frac{3}{2}}\right)$  і  $\left(-\sqrt{3}, -\sqrt{3}e^{-\frac{3}{2}}\right)$ . Асимптота:  $y = 0$ .

**1166.** Визначена всюди, крім  $x = 0$ . Екстремумів немає. Графік не має точок перегину. Асимптоти:  $x = 0$ ,  $y = 0$  і  $y = -1$ .

**1167.** Визначена при  $x > 0$ . Екстремумів немає. Точка перегину графіка

$\left(\frac{3}{e^2}, e^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}}\right)$ . Асимптоти:  $x = 0$  і  $y = x$ .

**1168.** Функція визначена при  $-\infty < x < -1$  і при  $0 < x < \infty$ . На інтервалі  $(-\infty, -1)$  зростає від  $e$  до  $\infty$ ; на інтервалі  $(0, +\infty)$  зростає від  $1$  до  $e$ . Графік складається з двох окремих гілок. Асимптоти:  $y = e$  і  $x = -1$ .

**1169.** Визначена всюди. Екстремумів немає. При  $x = \pm k\pi$  ( $k = 1, 3, 5, \dots$ ) стаціонарна. Графік симетричний відносно початку координат, не має асимптот; точки перегину  $(k\pi, k\pi)$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ); в точках перегину графік перетинає пряму  $y = x$ .

**1170.** Графік симетричний відносно осі ординат. Точки екстремумів задовольняють рівняння  $\operatorname{tg} x = -x$ . Абсциси точок перегину задовольняють рівняння  $x \operatorname{tg} x = 2$ . Асимптот немає.

**1171.** Визначена на інтервалах  $\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$ , де  $k = 1, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Період  $2\pi$ . Графік симетричний відносно осі ординат.  $y_{\max} = 0$  при  $x = 2k\pi$ . Графік не має точок перегину. Асимптоти:  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ .

**1172.** Визначена на інтервалах  $\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$ , де  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Період  $2\pi$ . Графік симетричний відносно осі ординат.  $y_{\min} = 1$  при  $x = 2k\pi$ . Графік не має точок перегину. Асимптоти:  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ .

**1173.** Визначена всюди. Графік симетричний відносно початку координат.  $y_{\max} = \frac{\pi}{2} - 1$  при  $x = -1$ ;  $y_{\min} = 1 - \frac{\pi}{2}$  при  $x = 1$ . Точка перегину  $(0, 0)$ . Асимптоти:  $y = x \pm \pi$ .

**1174.** Визначена всюди, крім  $x = 1$  і  $x = 3$ .  $y_{\max} = \frac{1}{e}$  при  $x = 2$ . Мінімумів немає. Графік не має точок перегину. Асимптоти:  $x = 1$ ,  $x = 3$  і  $y = 1$ .

**1175.** Визначена всюди. Період  $2\pi$ .  $y_{\min} = 1$  при  $x = k\pi$ , де  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ;  $y_{\max} = e - 1$  при  $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$  і  $y_{\max} = 1 + \frac{1}{e}$  при  $x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$ . Асимптот немає.

**1176.** Визначена всюди.  $y_{\max} = \frac{4}{27}$  при  $x = \frac{8}{27}$ ;  $y_{\min} = 0$  при  $x = 0$ . Графік не має ні точок перегину, ні асимптот.

**1177.** Визначена всюди. Графік симетричний відносно осі ординат.  $y_{\max} = 0$  при  $x = 0$ ;  $y_{\min} = -3$  при  $x = \pm 1$ . Графік не має ні точок перегину, ні асимптот.

**1178.** Визначена всюди. Графік симетричний відносно початку координат.  $y_{\max} = \frac{2}{3}$  при  $x = 1$ ;  $y_{\min} = -\frac{2}{3}$  при  $x = -1$ . Точка перегину графіка  $(0, 0)$ . Асимптот немає.

**1179.** Визначена всюди.  $y_{\max} = 2$  при  $x = 0$ ;  $y_{\min} = 0$  при  $x = -1$ . Точка перегину графіка  $\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$ . Асимптота:  $y = 1$ .

**1180.** Визначена всюди.  $y_{\max} \approx 2,2$  при  $x = \frac{7}{11}$ ;  $y_{\min} = 0$  при  $x = 1$ . Абсциси точок перегину графіка  $-1$  і  $\frac{7 \pm 3\sqrt{3}}{11}$ . Асимптот немає.

**1181.** Визначена всюди.  $y_{\max} = 2\sqrt[3]{4}$  при  $x=4$ ;  $y_{\min} = 0$  при  $x=0$ . Точка перегину графіка  $(6, 0)$ . Асимптота:  $x+y=2$ .

**1182.** Функція визначена при  $x \geq 0$ , двозначна. Функція  $y = x + \sqrt{x^5}$  (верхня гілка графіка) монотонно зростає. Функція  $y = x - \sqrt{x^5}$  (нижня гілка графіка) має максимум при  $x = \frac{\sqrt[3]{20}}{5}$ . Графік не має ні точок перегину, ні асимптот.

**1183.** Визначена при  $x \geq 0$ , двозначна. Функція  $y = x^2 + \sqrt{x^5}$  (верхня гілка графіка) монотонно зростає. Функція  $y = x^2 - \sqrt{x^5}$  (нижня гілка графіка) має максимум при  $x = \frac{16}{25}$ . Абсциса точки перегину нижньої гілки графіка  $\frac{64}{225}$ . Асимптот немає.

**1184.** Визначена при  $x \geq -1$ , двозначна. Екстремумів немає. Графік симетричний відносно осі абсцис, має точки перегину  $(0, 1)$  і  $(0, -1)$ . Асимптот немає.

**1185.** Визначена на інтервалах  $[-1, 0]$  і  $[1, \infty)$ , двозначна. Графік симетричний відносно осі абсцис  $|y|_{\max} = \frac{\sqrt[4]{12}}{3}$  при  $x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ . Абсциса точки перегину графіка  $\sqrt{1 + \frac{\sqrt{12}}{3}}$ . Асимптот немає.

**1186.** Визначена при  $x \geq 0$ , двозначна. Графік симетричний відносно осі абсцис.  $y_{\max} = \frac{\sqrt{12}}{9}$  при  $x = \frac{1}{3}$ . Графік не має точок перегину. Асимптот немає.

**1187.** Визначена при  $x=0$  та при  $x \geq 1$ . Початок координат — ізольована точка. Графік симетричний відносно осі абсцис. Екстремумів немає. Точки перегину графіка  $\left(\frac{4}{3}, \pm \frac{4\sqrt{3}}{9}\right)$ . Асимптот немає.

**1188.** Визначена при  $x < 0$  і при  $x \geq \sqrt[3]{2}$ , двозначна. Графік симетричний відносно осі абсцис.  $|y|_{\max} = 1$  при  $x = -1$ . Графік не має точок перегину. Асимптоти:  $x=0$  і  $y = \pm \frac{x\sqrt{3}}{3}$ .

**1189.** Визначена при  $x \leq -2$  і при  $x > 0$ , двозначна. Графік симетричний відносно прямої  $y=x$ .  $y_{\max} = -2$  при  $x=1$ . Графік не має точок перегину. Асимптоти  $x=0$ ;  $y=0$  і  $x+y=0$ .

**1190.** Визначена при  $-a \leq x < a$ , двозначна. Графік симетричний відносно осі

абсцис.  $|y|_{\max} = a\sqrt{\frac{5\sqrt{5}-11}{2}}$  при  $x = -\frac{a}{2}(\sqrt{5}-1)$ . Точок перегину немає.

Асимптота:  $x = a$ .

**1191.** Визначена при  $0 \leq x \leq 4$ , двозначна. Графік симетричний відносно осі

абсцис.  $|y|_{\max} = \sqrt{3}$  при  $x = 3$ . Абсциса точки перегину графіка  $(3 - \sqrt{3})$ .

Асимптот немає.

**1192.** Визначена при  $-2 \leq x \leq 2$ , двозначна. Графік симетричний відносно осей

координат.  $|y|_{\max} = \frac{3\sqrt{3}}{5}$  при  $x = \pm 1$ . Точки перегину графіка  $(0, 0)$  і

$\left(\pm\sqrt{3}, \pm\frac{\sqrt{3}}{5}\right)$ . Асимптот немає.

**1193.** Визначена при  $-1 \leq x \leq 1$ , двозначна. Графік симетричний відносно осей

координат.  $|y|_{\max} = \frac{1}{2}$  при  $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ . Точка перегину графіка  $(0, 0)$ . Асимптот немає.

**1194.** Визначена при  $x \geq 1$ , двозначна. Графік симетричний відносно осі

абсцис.  $|y|_{\max} = 1$  при  $x = 2$ . Абсциса точки перегину  $\frac{6+2\sqrt{3}}{3}$ . Асимптота:  $y = 0$ .

**1195.** Визначена при  $0 \leq x \leq 2a$ , двозначна. Графік симетричний відносно осі абсцис. Екстремумів немає. Точок перегину немає. Асимптота:  $x = 2a$ .

**1196.** Визначена при  $x < 0$ , при  $0 < x \leq 1$  і при  $x \geq 2$ , двозначна. Графік симетричний відносно осі абсцис, має асимптоти  $x = 0$  і  $y = \pm 1$  і дві точки перегину. Екстремумів немає.

**1197.** Визначена при  $-a \leq x < 0$  і при  $0 < x \leq a$ , двозначна. Графік симетричний відносно осі абсцис. Екстремумів немає. Точки перегину графіка

$\left[a(\sqrt{3}-1), \pm a\sqrt[4]{\frac{27}{4}}\right]$ . Асимптота:  $x = 0$ .

**1198.** Визначена при  $-1 \leq x \leq 1$  і при  $x = \pm 2$ , двозначна. Графік симетричний

відносно осей координат і має дві ізольовані точки:  $(\pm 2, 0)$ .  $|y|_{\max} = 1$  при  $x = 0$ . Точок перегину і асимптот немає.

**1199.** Визначена при  $-1 \leq x \leq 1$ , двозначна. Графік симетричний відносно осей

координат.  $|y|_{\max} = 1$  при  $x = 0$ . Точки перегину графіка  $\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \pm\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$ .

Асимптот немає.

**1200.** Визначена при  $x \leq -1$  і при  $x \geq 1$ , двозначна. Графік симетричний відносно осей координат. Екстремумів немає. Точки перегину графіка  $\left(\pm\sqrt{2}, \pm\frac{1}{2}\right)$ . Асимптоти:  $y = \pm x$ .

**1201.** Визначена при  $x \geq 0$ , двозначна. Графік симетричний відносно осі абсцис.  $|y|_{\max} = 1$  при  $x = \frac{1}{2}$ . Абсциса точки перегину графіка  $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$ . Асимптота:  $y = 0$ .

**1202.** Визначена всюди, крім  $x = 0$ . Екстремумів немає. Точка перегину графіка  $\left(-\frac{1}{2}, e^{-2} + \frac{1}{2}\right)$ . Асимптоти:  $x = 0$  і  $x + y = 1$ .

**1203.** Визначена всюди, крім  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ , де  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  Період  $\pi$ .

Екстремумів немає. Графік не має точок перегину. Асимптоти:  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ .

**1204.** Визначена всюди. Графік симетричний відносно осі ординат. Точки екстремумів задовольняють рівняння  $x = \operatorname{tg} x$ . Асимптота:  $y = 0$ .

**1205.** Визначена всюди. Екстремумів немає. Графік не має точок перегину. При  $x \leq 0$  функція тотожна лінійній функції  $y = 1 - x$ . Асимптота:  $x + y = 3$ .  $(0, 1)$  — кутова точка графіка з двома різними дотичними.

**1206.** Визначена всюди. Графік симетричний відносно осі ординат.  $y_{\max} = 3$  при  $x = 0$ ,  $y_{\min} = -1$  при  $x = \pm 2$ . Графік не має ні точок перегину, ні асимптот, і права його частина є частиною параболи з двома різними дотичними.

**1207.**  $\frac{\sin b - \sin a}{\ln b - \ln a} = \zeta \cos \zeta$ , де  $a < \zeta < b$ .

**1208.**  $e^b + e^a = 2e^\zeta$ , де  $a < \zeta < b$ .

**1211.**  $\frac{2}{3\sqrt[6]{a}}$ .

**1212.** 0.

**1213.** 1.

**1214.**  $\frac{\alpha}{\beta}$ .

**1215.**  $\frac{1}{3}$ .

**1216.**  $\frac{a}{\sqrt{b}}$ .

**1217.**  $-\frac{1}{2}$ .

**1218.** 2.

**1219.**  $\frac{m}{n} a^{m-n}$ .

**1220.**  $\frac{\ln \frac{a}{b}}{\ln \frac{c}{d}}$ .

**1221.** -2.

**1222.** 2.

**1223.**  $\ln \frac{a}{b}$ .

**1224.**  $\cos a$ .

**1225.** 2.

**1226.** 1.

|                             |                         |                            |           |
|-----------------------------|-------------------------|----------------------------|-----------|
| 1227. 1.                    | 1228. $\frac{1}{128}$ . | 1229. 16.                  | 1230. 1.  |
| 1231. 1.                    | 1232. -2.               | 1233. 0.                   | 1234. 0.  |
| 1235. $a$ .                 | 1236. $\frac{1}{2}$ .   | 1237. $\frac{4a^2}{\pi}$ . | 1238. -1. |
| 1239. 0.                    | 1240. $\infty$ .        | 1241. $\frac{a+b+c}{3}$ .  |           |
| 1242. 1.                    | 1243. $\infty$ .        | 1244. 1.                   | 1245. 1.  |
| 1246. $e$ .                 | 1247. 1.                | 1248. $e^2$ .              |           |
| 1249. $e^{\frac{2}{\pi}}$ . | 1250. 1.                | 1251. $\frac{1}{2}$ .      |           |

$$1252. (x-4)^4 + 11(x-4)^3 + 37(x-4)^2 + 21(x-4) - 56.$$

$$1253. (x+1)^3 - 5(x+1) + 8.$$

$$1254. (x-1)^{10} + 10(x-1)^9 + 45(x-1)^8 + 120(x-1)^7 + 210(x-1)^6 + 249(x-1)^5 + 195(x-1)^4 + 90(x-1)^3 + 15(x-1)^2 - 5(x-1) - 1.$$

$$1255. x^6 - 9x^5 + 30x^4 - 45x^3 + 30x^2 - 9x + 1.$$

$$1256. -1 - (x+1)(x+1) - (x+1)^2 - \dots - (x+1)^n + \dots + (-1)^{n+1} \frac{(x+1)^{n+1}}{(-1 + \theta(x+1))^{n+2}},$$

де  $0 < \theta < 1$ .

$$1257. x + \frac{x^2}{1} + \frac{x^3}{2!} + \dots + \frac{x^n}{(n-1)!} (\theta x + n + 1) e^{\theta x}.$$

$$1258. 2 + \frac{x-4}{4} - \frac{(x-4)^2}{64} + \frac{(x-4)^3}{512} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{(2n-2)!(x-4)^n}{n!(n-1)!2^{4n-2}} +$$

$$+ \frac{(-1)^n (2n)!(x-4)^{n+1}}{2^{2n+1} n! (n+1)! \sqrt{(4 + \theta(x-4))^{2n+1}}}, \text{ де } 0 < \theta < 1.$$

$$1259. 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \frac{2^{2n+1}}{(2n+1)!} \frac{e^{\theta x} - e^{-\theta x}}{2}, \quad 0 < \theta < 1.$$

$$1260. (x-1) + \frac{5}{21}(x-3)^2 + \frac{11}{3!}(x-1)^3 + \frac{6}{4!}(x-1)^4 + \dots - \frac{(-1)^n 6(x-1)^n}{(n-3)(n-2)(n-1)^n} +$$

$$+ \frac{(-1)^{n+1} 6(x-1)^{n+1}}{(n-2)(n-1)n(n+1)(1 + \theta(x-1))^{n-2}}.$$

$$1261. \frac{2x^2}{2!} - \frac{2^3 x^4}{4!} + \frac{2^5 x^6}{6!} - \frac{2^7 x^8}{8!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{2^{2n-1} x^{2n}}{(2n)!} + \frac{(-1)^n 2^{2n} x^{2n+1}}{(2n+1)!} \sin 2(\theta - x),$$

$0 < \theta < 1$ .

$$1262. 2 - (x-2) + (x-2)^2 - (x-2)^3 + \left[ \frac{(x-2)^4}{1 + \theta(x-2)^5} \right], \text{ де } 0 < \theta < 1.$$

$$1263. x + \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1 + 2 \sin^3 \theta x}{\cos^4 \theta x}, \text{ де } 0 < \theta < 1. \quad 1275. S = \sqrt{(p-x)(p-y)(x+y-p)p}.$$

$$1276. V = \frac{1}{3} \pi y (x^2 - y^2). \quad 1277. \text{ б), г).}$$

$$1278. \text{ а) } \frac{1}{5}; \text{ б) } f(x; y); \text{ в) } -f(x; y); \text{ г) } -f(x; y); \text{ д) } \frac{y}{x}; \text{ е) } f(x; y).$$

$$1279. \text{ а) } \frac{1}{3}; \text{ б) } (f(x; y))^{-1}; \text{ в) } f(x; y); \text{ г) } f(x; y); \text{ д) } f(x; y); \text{ е) } \frac{x^2 + 3y^2}{3x^2 + y^2}.$$

$$1280. 1. \quad 1281. \text{ а) } f(x; y) = \frac{1}{2}(x^2 - xy); \text{ б) } f(x; y) = \frac{x}{y} - xy; \text{ в) } f(x; y) =$$

$$= x^2 \frac{1-y}{1+y}; \text{ г) } f(x; y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}.$$

$$1282. \text{ а) } z = e^{2yx} \ln^4(x+y); \quad \text{б) } z = e^{2xy} \sin\left(e^{xy} \cdot \sqrt{x^2 + y^3}\right); \quad \text{в) } z = \sin(xy) +$$

$$+ \ln \operatorname{tg} x + \sin(xy) \ln(\operatorname{tg} x); \text{ г) } z = \cos 3^{x+y} + \operatorname{tg}^2 x; \text{ д) } z = \arccos x^2 + \operatorname{ctg}\left(\frac{1}{y^2}\right).$$

$$1283. \text{ а), в), г), е), ж), з).}$$

$$1284. x^2 + y^2 \leq 1. \text{ Одиначний круг з центром у початку координат, включаючи межу області.}$$

$$1285. y > -x^2. \text{ Множина точок координатної площини за винятком точок параболи та її внутрішніх точок.}$$

$$1286. \begin{cases} x > 0; \\ y > 0; \\ x \neq 1. \end{cases} \text{ Множина точок першого квадранта за винятком точок прямих:}$$

$$y = 0; \quad x = 0; \quad x = 1.$$

$$1287. \begin{cases} -1 \leq x \leq 1; \\ -1 \leq y \leq 1. \end{cases} \text{ Квадрат із стороною } a = 2 \text{ та центром у початку координат,}$$

стороны якого паралельні осям координат.

$$1288. \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \geq 1. \text{ Множина точок площини, крім внутрішніх точок області,}$$

що обмежена еліпсом, симетричним відносно осей координат, велика та мала півосі якого дорівнюють відповідно 3 та 2.

**1289.**  $\begin{cases} y \neq 0; \\ -|y| \leq x \leq |y|. \end{cases}$  Точки площини, що прилягають до осі ординат та знаходяться між бісектрисами координатних кутів, включаючи точки самих бісектрис за винятком початку координат.

**1290.**  $\begin{cases} y > \sqrt{x}; \\ x \geq 0. \end{cases}$  Множина точок першого квадранта, що лежать вище гілки параболи  $y = \sqrt{x}$ , тобто без межі цієї області.

**1291.**  $x^2 - y^2 \geq 1$ . Внутрішність гілок рівносторонньої гіперболи з півосями, що дорівнюють 1, та точки самих гілок гіперболи.

**1292.**  $-x < y < x$ . Внутрішні точки, що лежать між променями, проведеними із початку координат під кутами  $\pm 45^\circ$  до осі  $Ox$ .

**1293.**  $xy > 0$ . Внутрішні точки першого та третього квадрантів.

**1294.**  $2\pi k \leq x^2 + y^2 \leq \pi + 2\pi k$ ,  $k \in Z_0$ . Точки круга радіусом  $\sqrt{\pi}$ , а також концентричні кільця з радіусами  $\sqrt{2\pi k}$ ,  $\sqrt{\pi + 2\pi k}$ ,  $k \in N$ .

**1295.**  $\begin{cases} x \geq y; \\ x \neq -y. \end{cases}$  Півплощина, що лежить нижче прямої  $y = x$  включаючи цю пряму, за винятком точок бісектриси другого та четвертого координатних кутів.

**1296.**  $\begin{cases} |x| \geq 2; \\ |y| \geq 2. \end{cases}$  Множина точок площини, за винятком внутрішніх точок хреста, утвореного прямими  $x = \pm 2$ ,  $y = \pm 2$ .

**1297.**  $y = x$ . Всі точки бісектриси першого та третього координатних кутів.

**1298.**  $y \leq 8x^2 - 2x$ . Множина точок площини за винятком внутрішніх точок параболи та точок самої гіперболи.

**1299.**  $\left| \frac{x}{x+y} \right| \leq 1$ . Множина точок вертикальних тупих кутів, що утворені прямими  $y = 0$ ,  $y = -2x$  за винятком початку координат.

**1300.**  $4 \geq x^2 + y^2 \geq 1$ . Множина точок кільця, утвореного концентричними колами з центром у початку координат.

**1301.**  $x^2 + y^2 \neq 1$ ;  $x \neq 0$ ;  $y \neq 0$ . Множина точок площини за винятком початку координат і точок кола  $x^2 + y^2 = 1$ .

**1302.**  $x + y \neq k$ ,  $k \in Z$ . Множина точок площини за винятком точок прямих  $y = -x + k$ ,  $k \in Z$ .

**1303.**  $y^2 \leq 4x$ ,  $x^2 + y^2 < 1$ . Множина внутрішніх точок одиничного круга з центром у початку координат, що лежать в середині параболи.

$$1304. \begin{cases} x^2 + y^2 < 1; \\ y \leq 1 - |x|. \end{cases} \quad 1305. |y| \geq |3x|. \quad 1306. \begin{cases} |x| > 2|y|; \\ x^2 + y^2 \geq 4. \end{cases}$$

$$1307. 10 + y^2 \geq x > y^2. \quad 1308. \sqrt{x} \leq y < 4 - x; \quad x \geq 0.$$

$$1309. |x+1| < y \leq 3. \quad 1310. y > \frac{1}{x}; \quad \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1.$$

$$1311. x^2 + y^2 < 4; \quad xy \geq 1. \quad 1312. x^2 + y^2 > 2 \geq |x| + |y|.$$

$$1313. x^2 + (x+y)^2 < 1; \quad 2|x| > |y|. \quad 1314. 0 \leq y \leq 2x; \quad \frac{x}{2} + \frac{y}{3} < 1.$$

$$1315. x + 2 < y \leq \frac{1}{x}. \quad 1316. \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} > 1; \quad y^2 > |x|.$$

1317. а) Лінії рівня — прямі  $x + y = C$ , функція визначає площину; б) лінії рівня — концентричні кола  $x^2 + y^2 = C$ , функція — параболоїд обертання; в) лінії рівня — рівносторонні гіперболи  $x^2 - y^2 = C$ , функція — гіперболічний параболоїд; г) лінії рівня — параболі  $y = Cx^2$ ; д) лінії рівня — кола  $x^2 + y^2 = 2Cx$ ; е) лінії рівня — квадрати  $|x| + |y| = C$ , функція — бічна поверхня чотирикутної піраміди.

1318. а)  $y = C - x^2$ ; б)  $xy = C$ ,  $|C| \leq 1$ ; в)  $y = Cx$ ,  $x \neq 0$ ; г)  $x^2 + y^2 = C^2$ ; д)  $y = ax + b$ ,  $a = \ln b$ ; е) лінії рівня — сторони кутів, що паралельні додатним напрямкам координатних осей  $Ox$  та  $Oy$  з вершинами на прямій  $y = x$ .

1319. а)  $x + y + z = C$ ; б)  $x^2 + y^2 + z^2 = C^2$ ; в)  $x^2 + y^2 - z^2 = C$ ; г)  $x^2 + y^2 + z^2 = C^2$ ; д)  $x^2 + y^2 = zC$ ,  $z \neq 0$ ; е)  $x^2 + y^2 + z^2 = C^2$ .

1320. в), г), е. 1321. 2. 1322. 0. 1323. Не існує.

1324.  $e^2$ . 1325. 0. 1326. 0. 1327.  $e$ .

1328.  $\ln 2$ . 1329. 0. 1330. 0. 1331. 2.

1332. 0. 1333. 0. 1334. Не існує. 1335. 0.

1336. 1. 1337. б), г). 1338. а).

1339. а) лінія розриву  $y = x$ ; б) лінія розриву — коло  $x^2 + y^2 = 1$ ; в) лінії розриву — координатні осі; г)  $O(0; 0)$ ; д) лінії розриву — координатні осі; е) лінії розриву —  $y = \pm x$ .

1340. а) неперервна; б) розривна; в) розривна; г) розривна.

1341. Неперервна. 1348. г). 1349. Достатні: в), г); необхідні: а), б).

1351. г). 1361. в), г). 1362. б), г). 1363. б), в).

$$1364. z'_x = 2x - 2ay; \quad z'_y = 3y^2 - 2ax.$$

$$1365. z'_x = 2xy^3 - \frac{1}{2\sqrt{x+y}}; \quad z'_y = 3x^2y^2 - \frac{1}{2\sqrt{x+y}}.$$

$$1366. z'_x = z'_y = (x + y + 1)^{-2}.$$

$$1367. z'_x = \frac{3x - y}{2\sqrt{x - y}}; \quad z'_y = \frac{x - 3y}{2\sqrt{x - y}}.$$

$$1368. u'_x = \frac{y}{z} + yz(xy)^{z-1}; \quad u'_y = \frac{x}{z} + xz(xy)^{z-1}; \quad u'_z = -\frac{xy}{z^2} + (xy)^z \ln xy.$$

$$1369. z'_x = \frac{4x}{2x^2 - y^2}; \quad z'_y = \frac{-2y}{2x^2 - y^2}.$$

$$1370. z'_x = \frac{-y|x|}{x^2\sqrt{x^2 - y^2}}; \quad z'_y = -\frac{|x|}{x\sqrt{x^2 - y^2}}.$$

$$1371. z'_x = e^{\frac{\sin x}{y}} \left( 1 + \frac{x}{y} \cos \frac{x}{y} \right); \quad z'_y = -\frac{x^2}{y^2} \cos \frac{x}{y} e^{\frac{\sin x}{y}}.$$

$$1372. z'_x = \frac{2}{y \sin \frac{2x}{y}}; \quad z'_y = -\frac{2x}{y^2 \sin \frac{2x}{y}}.$$

$$1373. z'_x = \frac{1}{1 + x^2}; \quad z'_y = \frac{1}{1 + y^2}.$$

$$1374. z'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2} \left( x + \sqrt{x^2 + y^2} \right)}; \quad z'_y = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

$$1375. u'_x = yz^{xy} \ln z; \quad u'_y = xz^{xy} \ln z; \quad u'_z = xyz^{xy-1}.$$

$$1376. z'_x = \frac{2}{x} + \operatorname{ctg}(x + y) + \operatorname{tg}(x + y); \quad z'_y = -\frac{2}{y} + \operatorname{ctg}(x + y) + \operatorname{tg}(x + y).$$

$$1377. z'_x = \sin y \cdot x^{\sin y - 1} + y^{\sin x} \cdot \ln y \cdot \cos x; \quad z'_y = x^{\sin y} \cdot \cos y \cdot \ln x + \sin x \cdot y^{\sin x - 1}.$$

$$1378. \quad u'_x = z^{(\operatorname{ctg} y)^x} \ln z \cdot (\operatorname{ctg} y)^x \cdot \ln \operatorname{ctg} y; \quad u'_y = -z^{(\operatorname{ctg} y)^x} \ln z \cdot x(\operatorname{ctg} y)^{x-1} \cdot \frac{1}{\sin^2 y};$$

$$u'_z = (\operatorname{ctg} y)^x \cdot z^{(\operatorname{ctg} y)^x - 1}.$$

$$1379. u'_x = y^z x^{y^z - 1}; \quad u'_y = x^{y^z} \ln x \cdot zy^{z-1}; \quad u'_z = x^{y^z} \ln x \cdot y^z \ln y.$$

$$1380. \quad u'_x = z^{\operatorname{arctg} x + y^2} \ln z \cdot \frac{1}{1 + x^2}; \quad u'_y = z^{\operatorname{arctg} x + y^2} \ln z \cdot 2y; \quad u'_z = (\operatorname{arctg} x + y^2) \times \\ \times z^{\operatorname{arctg} x + y^2 - 1}.$$

$$1381. u'_x = \left( x + \frac{y}{z} \right)^{x-y} \left( \ln \left( x + \frac{y}{z} \right) + \frac{(x-y)z}{xz + y} \right); \quad u'_y = \left( x + \frac{y}{z} \right)^{x-y} \left( \frac{x-y}{xz + y} - \ln \left( x + \frac{y}{z} \right) \right); \\ u'_z = -\frac{y(x-y)}{z^2} \left( x + \frac{y}{z} \right)^{x-y-1}.$$

$$1382. u'_x = \frac{z(1 + \log_y x)^{z-1}}{x \ln y}; \quad u'_y = -\frac{z \ln x (1 + \log_y x)^z}{y \ln^2 y}; \quad u'_z = z(1 + \log_y x)^{z-1}.$$

$$1383. z'_x(1; 1) = -\frac{2}{\pi}; \quad z'_y(1; 1) = \frac{2}{\pi}. \quad 1384. z'_x(-1; 1) = -3; \quad z'_y(-1; 1) = 3,5.$$

$$1385. z'_x(1; 2) = 0; \quad z'_y(1; 2) = \frac{1}{4}. \quad 1386. z'_x(0,1; 1,1) = z'_y(0,1; 1,1) = 1.$$

$$1387. z'_x(0; 0) = 0; \quad z'_y(0; 0) = 2.$$

$$1388. u'_x(-1; 1; 1) = -5; \quad u'_y(-1; 1; 1) = u'_z(-1; 1; 1) = 2,5.$$

$$1389. dz = \frac{4xy(ydx - xdy)}{(x^2 + y^2)^2}. \quad 1390. dz = y^2 x^{y-1} dx + x^y (1 + y \ln x) dy.$$

$$1391. dz = 2^{\arctg^2(xy+y^2)} \ln 2 \cdot 2\arctg(xy+y^2) \cdot \frac{ydx + (x+2y)dy}{1+(xy+y^2)^2}.$$

$$1392. dz = (\cos y^x - x \sin y^x \cdot y^x \ln y) dx - x^2 \sin y^x \cdot y^{x-1} dy.$$

$$1393. du = \left(xy + \frac{x}{y}\right)^{z-1} \left( \left(y + \frac{1}{y}\right) z dx + \left(1 - \frac{1}{y^2}\right) x z dy + \left(xy + \frac{x}{y}\right) \ln \left(xy + \frac{x}{y}\right) dz \right)$$

$$1394. du = \frac{z^2}{x^2 y^2 + z^4} \left( y dx + x dy - \frac{2xy}{z} dz \right).$$

$$1395. dz = 4^y \sin^2(xy) (3y \cos xy dx + (3x \cos(xy) + \ln 4 \cdot \sin(xy)) dy).$$

$$1396. dz = 3^{xy} \ln 3 \left( \left( y \cos 3^x - y \operatorname{ctg}^2 x + \frac{2 \operatorname{ctg} x \cdot \log_3 e}{\sin^2 x} \right) dx + (x \cos 3^{xy} - x \operatorname{ctg}^2 x) dy \right).$$

$$1397. du = 2 \sin(xz) \cos(xz) \cdot z dx + \left( 4^y \ln 4 - \frac{1}{z} \right) dy + \left( 2 \sin(xz) \cdot \cos(xz) x + \frac{y}{z^2} \right) dz.$$

$$1398. du = \left( \frac{1}{x} - \frac{2}{1+x^2} \right) dx + 2^y \ln 2 dy + \frac{dz}{z}. \quad 1399. 108,972.$$

$$1400. 2,95. \quad 1401. 0,97. \quad 1402. 3,037. \quad 1403. 0,502.$$

$$1404. 1,055. \quad 1405. 0,005. \quad 1406. \frac{dz}{dt} = \frac{e^t(t \ln t - 1)}{t \ln^2 t}.$$

$$1407. \frac{dz}{dt} = \frac{t}{\sqrt{y}} \operatorname{ctg} \frac{x}{\sqrt{y}} \left( 6 - \frac{x}{2y^2} \right). \quad 1408. \frac{du}{dt} = 0.$$

$$1409. z'_x = \frac{2xv + u}{u^2 + v^2}; \quad z'_y = -\frac{v + 2yu}{u^2 + v^2}.$$

$$1410. z'_x = y 2^{u+v} \ln 2 (\cos(xy) - \sin(xy)); \quad z'_y = x 2^{u+v} \ln 2 (\cos(xy) - \sin(xy)).$$

$$1411. \text{a) } r; \text{б) } abr. \quad 1412. \frac{32 + 2\pi^2 - \pi^3}{64}.$$

$$1413. \text{ а) } \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}; \text{ б) } \frac{dy}{dx} = -\frac{x-ay}{y+ax}; \text{ в) } \frac{dy}{dx} = \frac{y^x \ln y}{1-xy^{x-1}}; \text{ г) } \frac{dy}{dx} = \frac{y}{y-1}; \text{ д) } \frac{dy}{dx} = -\frac{e^y + y \cos(xy)}{x(e^y + \cos(xy))}.$$

$$1414. \frac{dy}{dx} = 3 \text{ а) } \frac{dy}{dx} = -1. \quad 1415. \frac{dy}{dx} = 1.$$

$$1416. \text{ а) } \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x^2 - yz}{xy - z^2}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{6y^2 - 3xz - 2}{3(xy - z^2)}; \quad \text{б) } \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{z \sin x - \cos y}{\cos x - y \sin z}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x \sin y - \cos z}{\cos x - y \sin z}; \text{ в) } \frac{\partial z}{\partial x} = -1; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2}; \text{ г) } \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{C^2 x}{a^2 x}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{C^2 y}{b^2 z}.$$

$$1417. \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{x^2 + 2y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

$$1418. \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{x}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{-y}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{x^3 + (x^2 - y^2)\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3} \left( x + \sqrt{(x^2 + y^2)^2} \right)}.$$

$$1419. \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{abc y^2}{\sqrt{(b^2 x^2 + a^2 y^2)^3}}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{abc xy}{\sqrt{(b^2 x^2 + a^2 y^2)^3}}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{abc x^2}{\sqrt{(b^2 x^2 + a^2 y^2)^3}}.$$

$$1420. \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2(y - x^2)}{(x^2 + y)^2}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{2x}{(x^2 + y)^2}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{1}{(x^2 + y)^2}.$$

$$1421. \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{2x}{(1+x)^2}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{2y}{(1+y^2)^2}.$$

$$1422. \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2a^2 \cos 2(ax + by); \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2ab \cos 2(ax + by); \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2b^2 \cos 2(ax + by).$$

$$1423. \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = e^{xe^y + 2y}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (1 + xe^y) e^{xe^y + y}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x(1 + xe^y) e^{xe^y + y}.$$

$$1424. \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{4y}{(x+y)^3}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{2(x-y)}{(x+y)^3}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{4x}{(x+y)^3}.$$

$$1425. \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\ln y (\ln y + 1)}{x^2} e^{\ln x \ln y}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\ln x \ln y + 1}{xy} e^{\ln x \ln y}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\ln x (\ln x - 1)}{y^2} e^{\ln x \ln y}.$$

$$1426. \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{xy^3}{\sqrt{(1-x^2 y^2)^3}}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2 y^2)^3}}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{x^3 y}{\sqrt{(1-x^2 y^2)^3}}.$$

1427.  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{x^2 + z^2}{z^3}$ ;  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{xy}{z^3}$ ;  $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{y^2 + z^2}{z^3}$ .
1428.  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{2xy^3z}{(z^2 - xy)^3}$ ;  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{z(z^4 - 2xyz^2 - x^2y^2)}{(z^2 - xy)^3}$ ;  $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{2x^3yz}{(z^2 - xy)^3}$ .
1429.  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{x + y + z}{(x + y + z - 1)^3}$ .
1430.  $\frac{\partial^2 x}{\partial x^2} = -\frac{y^2z}{(x^2 - y^2)^2}$ ;  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{xyz}{(x^2 - y^2)^2}$ ;  $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{x^2z}{(x^2 - y^2)^2}$ .
1431.  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ .      1432.  $d^2z = -2ydx^2 + 4(y - x)dxdy + 2xdy^2$ .
1433.  $d^2z = -\frac{(dx - dy)^2}{(x - y)^2}$ .
1434.  $d^2z = \frac{(3x^2 - y^2)dx^2 + 8xydxdy + (3y^2 - x^2)dy^2}{(x^2 + y^2)^3}$ .
1435.  $d^2z = 2 \sin 2y dxdy + 2x \cos 2y dy^2$ .      1436.  $d^2z = e^{xy}((ydx + xdy)^2 + 2dxdy)$ .
1437.  $d^2z = -\frac{(ydx - xdy)^2}{xy^2}$ .      1438.  $d^2u = 2(zdxdy + ydxdz + xdydz)$ .
1439.  $d^2z = \frac{2(x - z)(y + 1)((x - z)^2 + y^2)}{((x - z)^2 + y(y + 1))^3} dy^2$ .
1440.  $d^2z = -\frac{z^2(ydx - xdy)^2}{y^2(x + z)^3}$ .      1441.  $\frac{5}{\sqrt{3}}$ .      1442.  $-\sqrt{5}$ .
1443.  $\frac{68}{13}$ .      1444. 5.      1445.  $\sqrt{1701}$ .      1446. 0.
1447.  $9\vec{i} - 3\vec{j}$ .      1448.  $\left| \overrightarrow{gradu} \right| = 6$ ;  $\cos \alpha = \frac{2}{3}$ ;  $\cos \beta = -\frac{2}{3}$ ;  $\cos \gamma = \frac{1}{3}$ .
1449.  $\arccos \frac{3}{\sqrt{10}}$ .      1450.  $\frac{3\pi}{4}$ .      1451.  $\pi - \arccos \frac{6}{5\sqrt{34}}$ .      1452.  $-\vec{j}$ .
1453.  $\left(-\frac{1}{3}; \frac{3}{4}\right); \left(\frac{7}{3}; -\frac{3}{4}\right)$ .      1455.  $2x + 4y - z = 3$ .
1456.  $x + y + 2z = 0$ .      1457.  $x + y + z - 3a = 0$ .
1458.  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - \frac{z}{c} = 1$ .      1459.  $x + y - z = \pm 9$ .

$$1460. \frac{x-3}{3} = \frac{y-4}{4} = \frac{z-5}{-5}. \quad 1461. \cos \alpha = -\cos \beta = \cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$$1462. a^2. \quad 1463. \frac{a}{\sqrt{3}}. \quad 1473. \text{в), г)}.$$

$$1474. \text{а) } f(x; y) \approx y + xy + \frac{3x^2 - y^3}{3!}; \text{ б) } f(x; y) \approx 1 - \frac{x^2 + y^2}{2!}; \text{ в) } f(x; y) \approx 1 + x + y + \frac{x^2 + y^2}{2!} + \frac{x^3 + y^3}{3!}; \text{ г) } f(x; y) \approx 1 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2).$$

$$1475. z_{\min} = z(-4; 1) = -1.$$

$$1476. z_{\min} = z(0; 1) = 0.$$

$$1477. \text{Екстремумів немає.}$$

$$1478. z_{\min} = z(1; 0) = -1.$$

$$1479. z_{\max} = z(2; 3) = 108.$$

$$1480. z_{\min} = z(1; 1) = -1.$$

$$1481. z_{\min} = z(-1; -1) = z(1; 1) = -2, \text{ в точці } (0; 0) \text{ екстремуму немає.}$$

$$1482. z_{\min} = z(5; 2) = 30.$$

$$1483. z_{\max} = z(0; 0) = 1.$$

$$1484. z_{\max} = z(-4; -2) = 8e^{-2}, \text{ в точці } (0; 0) \text{ екстремуму немає.}$$

$$1485. z_{\min} = z(0; 0) = 0, \text{ в точці } \left(-\frac{1}{4}; -\frac{1}{2}\right) \text{ екстремуму немає.}$$

$$1486. \text{Екстремумів немає.}$$

$$1487. z_{\min} = z(1; 2) = 7 - 10 \ln 2.$$

$$1488. z_{\min} = z\left(\pm \frac{1}{\sqrt{2e}}; \pm \frac{1}{\sqrt{2e}}\right) = -\frac{1}{2e}; \quad z_{\max} = z\left(\pm \frac{1}{\sqrt{2e}}; \mp \frac{1}{\sqrt{2e}}\right) = \frac{1}{2e}, \text{ в точках } (0; \pm 1) \text{ та } (\pm 1; 0) \text{ екстремумів немає.}$$

$$1489. z_{\max} = z\left(\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{2}\sqrt{3}.$$

$$1490. z_{\min} = z\left(\frac{2\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{8}; \quad z_{\max} = z\left(\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

$$1491. u_{\min} = u(-1; -2; 3) = -14.$$

$$1492. u_{\min} = u(24; -144; -1) = -6913.$$

$$1493. z_{\max} = z(-1; 2) = -2; \quad z_{\min} = z(-1; 2) = 1.$$

$$1494. z_{\min} = z(1; -1) = -2; \quad z_{\max} = z(1; 1) = 6.$$

$$1495. z_{\min} = z(1; 1) = 2.$$

$$1496. z_{\min} = z(2; 2) = 4, \quad z_{\max} = z(2; -2) = -4.$$

$$1497. z_{\max} = z(1; 2) = 5, \quad z_{\min} = z(-1; -2) = -5.$$

$$1498. z_{\max} = z\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}.$$

$$1499. z_{\min} = z(\pm 2; \mp 3) = -50; \quad z_{\max} = z\left(\pm \frac{3}{2}; \pm 4\right) = 106\frac{1}{4}.$$

$$1450. z_{\min} = z\left(\frac{18}{13}; \frac{12}{13}\right) = \frac{36}{13}.$$

$$1501. z_{\min} = z(\pm 1; \mp 1) = -1; \quad z_{\max} = z(\pm 1; \pm 1) = 1.$$

$$1502. z_{\min} = z\left(\frac{3\pi}{8} + \pi k; \frac{5\pi}{8} + \pi k\right) = \frac{2 - \sqrt{2}}{2}; \quad z_{\max} = z\left(\frac{7\pi}{8} + \pi k; \frac{9\pi}{8} + \pi k\right) = \frac{2 + \sqrt{2}}{2}.$$

$$1503. z_{\min} = z(0; 0) = 0; \quad z_{\max} = z(0; 6) = 36.$$

$$1504. z_{\min} = z(0; 0) = 0; \quad z_{\max} = z(0; 2) = 8.$$

$$1505. z_{\min} = z(6; 6) = \frac{1}{18}.$$

$$1506. u_{\min} = u\left(-\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; -\frac{2}{3}\right) = -3; \quad u_{\max} = u\left(\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right) = 3.$$

$$1507. u_{\min} = u\left(\frac{1}{\sqrt{6}}; \frac{1}{\sqrt{6}}; -\frac{2}{\sqrt{6}}\right) = u\left(\frac{1}{\sqrt{6}}; -\frac{2}{\sqrt{6}}; \frac{1}{\sqrt{6}}\right) = u\left(-\frac{2}{\sqrt{6}}; \frac{1}{\sqrt{6}}; \frac{1}{\sqrt{6}}\right) =$$

$$= -\frac{1}{3\sqrt{6}}; \quad u_{\max} = u\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}; -\frac{1}{\sqrt{6}}; \frac{2}{\sqrt{6}}\right) = u\left(-\frac{1}{6}; \frac{2}{\sqrt{6}}; \frac{1}{\sqrt{6}}\right) =$$

$$= u\left(\frac{2}{\sqrt{6}}; -\frac{1}{\sqrt{6}}; -\frac{1}{\sqrt{6}}\right) = \frac{1}{3\sqrt{6}}.$$

$$1508. u_{\max} = u(1; 1; 1) = 2.$$

$$1509. \min z = z(0; 0) = 1; \quad \max z = z(1; 1) = 13.$$

$$1510. \min z = z\left(\pm \sqrt{\frac{2}{3}}; -\sqrt{\frac{1}{3}}\right) = -\frac{2}{3\sqrt{3}}; \quad \max z = z\left(\pm \sqrt{\frac{2}{3}}; \sqrt{\frac{1}{3}}\right) = \frac{2}{3\sqrt{3}}.$$

$$1511. \min z = z(1; 1) = z(0; -1) = -1; \quad \max z = z(2; -1) = 13.$$

$$1512. \min z = z(1; 0) = -3; \quad \max z = z(1; 2) = 17.$$

$$1513. \min z = z(3; -4) = -75; \quad \max z = z(-3; 4) = 125.$$

$$1514. \min z = 0; \quad \max z = 1.$$

$$1515. \min z = z(0; \pm 2) = -4; \quad \max z = z(\pm 2; 0) = 4.$$

$$1516. \min z = z(0; 0) = 0; \quad \max z = z(0; \pm 1) = \frac{3}{e}.$$

$$1517. \min z = z(0; 0) = 0; \quad \max z = z\left(\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{2}\sqrt{3}.$$

$$1518. \min u = 0; \quad \max u = 300.$$

$$1519. \min u = -\frac{1}{2}; \quad \max u = 1 + \sqrt{2}.$$

$$1520. \frac{n}{\sqrt[n]{a}}.$$

1521. Однакові.

$$1522. x = y = \sqrt[3]{2V}; \quad z = 0, 5\sqrt[3]{2V}.$$

$$1523. (\pm\sqrt{5}; 1).$$

$$1524. A(-3; -1), \quad B(0; 2), \quad C(3; -1).$$

$$1525. V = 8.$$

1526. а)  $\left(\frac{8}{5}; \frac{16}{5}\right); \left(-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right)$ . 1527. (1; 2). 1528. 1.
1529.  $\left(-\frac{5}{9}; -\frac{1}{9}\right)$ . 1530.  $\frac{p}{3}$  та  $\frac{2p}{3}$ .
1531.  $y \approx -0,833x^2 + 7,233x + 0,4$ ;  $y(3) \approx 14,6$ ;  $y(7) \approx 10,2$ .
1538. в), д). 1539. а), в). 1540. в). 1545. в), г).
1547.  $\frac{1}{11}(x+8)^{11} + C$ . 1548.  $-\frac{2}{9}\sqrt{(1-3x)^3} + C$ . 1549.  $2e^{\frac{x}{2}} + C$ .
1550.  $\frac{2^{5x+4}}{5 \ln 2} + C$ . 1551.  $\frac{1}{10} \ln|10x+3| + C$ . 1552.  $-\frac{1}{2} \ln|3-2x| + C$ .
1553.  $3 \sin \frac{x+3}{3} + C$ . 1554.  $-\frac{1}{4} \cos(4x+7) + C$ . 1555.  $-\frac{1}{25x+10} + C$ .
1556.  $\frac{1}{2} \ln|2x + \sqrt{4x^2 + 9}| + C$ . 1557.  $\frac{1}{6} \ln \left| \frac{3x-1}{3x+1} \right| + C$ . 1558.  $\frac{1}{10} \operatorname{arctg} \frac{2x}{5} + C$ .
1559.  $\frac{1}{5} \arcsin \frac{5x}{2} + C$ . 1560.  $\frac{1}{2} \operatorname{tg}(2x^2+1) + C$ . 1561.  $e^x - \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x} + C$ .
1562.  $\operatorname{tg} x - x + C$ . 1563.  $\operatorname{arctg} x - \frac{1}{x} + C$ . 1564.  $-\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x + C$ .
1565.  $\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C$ . 1566.  $x + \ln|x-1| + C$ . 1567.  $\frac{x^2}{2} - 2x + 4 \ln|x+2| + C$ .
1568.  $\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x - \ln|x+1| + C$ . 1569.  $\frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}} - \frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}} + C$ .
1570.  $\frac{1}{15}(3x+1)(2x+1)^{\frac{3}{2}} + C$ . 1571.  $3x - \frac{2(1,5)^x}{\ln 1,5} + C$ .
1572.  $\frac{3}{8}x - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x + C$ . 1573.  $2x + 2 \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C$ .
1574.  $\frac{2^{2x}}{2 \ln 2} + \frac{3^{2x}}{2 \ln 3} + \frac{2 \cdot 6^x}{\ln 6} + C$ . 1575.  $\frac{1}{2}e^{2x} + e^x + x + C$ .
1576.  $\ln|x| - \frac{1}{4x^4} + C$ . 1577.  $\arcsin x + \ln|x + \sqrt{x^2 + 1}| + C$ .
1578.  $-\operatorname{ctg} x - x + C$ . 1579.  $e^{\sin} + C$ .
1580.  $\frac{1}{3} \sin^3 x + C$ . 1581.  $-\frac{1}{3 \ln^3 x} + C$ . 1582.  $\frac{2}{3}(\arcsin)^{\frac{3}{2}} + C$ .

- 1583.**  $\frac{1}{84}(3+7x^2)^6 + C.$       **1584.**  $-\frac{1}{36}(4x^3+9)^3 + C.$       **1585.**  $-\frac{1}{2}e^{-x^2} + C.$   
**1586.**  $\frac{3^{x^3}}{\ln 27} + C.$       **1587.**  $-e^{\frac{1}{x}} + C.$       **1588.**  $\frac{2 \cdot 5^{\sqrt{x}}}{\ln 5} + C.$   
**1589.**  $\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x + C.$       **1590.**  $-\cos \ln x + C.$       **1591.**  $\sin(e^x) + C.$   
**1592.**  $-\ln|1+\cos x| + C.$       **1593.**  $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}^2 x + C.$       **1594.**  $\frac{1}{\ln 2}\arcsin 2^x + C.$   
**1595.**  $\frac{1}{3}\operatorname{arctg}^3 x + C.$       **1596.**  $\frac{3}{4}(1+\ln x)^{\frac{4}{3}} + C.$       **1597.**  $-e^{\operatorname{ctg} x} + C.$   
**1598.**  $e^{\arcsin x} + C.$       **1599.**  $\sec x + C.$       **1600.**  $2\sqrt{3-\cos^2 x} + C.$   
**1601.**  $\frac{1}{2}\ln^2(\operatorname{tg} x) + C.$       **1602.**  $\ln|1+\sin x \cos x| + C.$       **1603.**  $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\ln x-2}{\ln x+2}\right| + C.$   
**1604.**  $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg} \frac{x^2-1}{x\sqrt{2}} + C.$       **1605.**  $\frac{1}{4}\ln^2 \frac{1+x}{1-x} + C.$       **1606.**  $2\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}} + C.$   
**1607.**  $\frac{1}{2}\arcsin^2 x - \sqrt{1-x^2} + C.$       **1608.**  $x+2\ln|x-2| + \frac{1}{2}\ln^2|x-2| + C.$   
**1609.**  $x + \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}^2 x + C.$       **1610.**  $\ln|\sin x| - \cos x + C.$   
**1611.**  $\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x - \ln|\cos x| + C.$       **1612.**  $\frac{x^2}{2} - 2x + 4\ln(x+2) - \frac{1}{2}\ln^2(x+2) + C.$   
**1613.**  $\ln|x+\cos x| + C.$       **1614.**  $\frac{1}{3}\left(\sqrt{(x+1)^3} - \sqrt{(x-1)^3}\right) + C.$   
**1615.**  $\frac{1}{3}\left(\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + \frac{1}{\sin 3x}\right) + C.$       **1616.**  $-\ln|\sin x + \cos x| + C.$   
**1617.**  $\frac{3}{2}\sqrt[3]{1-\sin 2x} + C.$       **1618.**  $\frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3} - 2\ln|\cos \sqrt{x+1}| + C.$   
**1619.**  $\frac{1}{99(1-x)^{99}} - \frac{1}{49(1-x)^{98}} + \frac{1}{97(1-x)^{97}} + C.$       **1620.**  $\operatorname{arctg} x + \frac{1}{x} - \frac{1}{3x^3} + C.$   
**1621.**  $\frac{2}{3}\left(x^3 + \sqrt{(x^2-1)^3}\right) - x + C.$       **1622.**  $\operatorname{arctg} x + 2\sqrt{1-x^2} + C.$   
**1623.**  $\frac{1}{2}\operatorname{arctg} \frac{x+1}{2} + C.$       **1624.**  $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x}{x+2}\right| + C.$       **1625.**  $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-5}{x-2}\right| + C.$   
**1626.**  $\frac{1}{4}\operatorname{arctg} \frac{2x+1}{2} + C.$       **1627.**  $\arcsin(x-2) + C.$

1628.  $-8\sqrt{5+2x-x^2} - 3\arcsin\frac{x-1}{6} + C.$
1629.  $\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+2) + \operatorname{arctg}(x+1) + C.$
1630.  $\frac{61}{16}\ln|8x+9+4\sqrt{4x^2+9x+1}| - \frac{5}{4}\sqrt{4x^2+9x+1} + C.$
1631.  $\ln|x+1+\sqrt{x^2+2x+3}| + C.$       1632.  $\frac{1}{3}\ln|3x-1+\sqrt{9x^2-6x+2}| + C.$
1633.  $\frac{1}{3}\arcsin\frac{3x-2}{\sqrt{2}} + C.$       1634.  $-\ln|2x^2-3x+1| + C.$
1635.  $\frac{2}{9}\sqrt{9x^2+6x+2} + \frac{13}{9}\ln|3x+1+\sqrt{9x^2+6x+2}| + C.$
1636.  $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x^2+3}{x^2-1}\right| + C.$       1637.  $\ln\left(e^x + \frac{1}{2} + \sqrt{1+e^x+e^{2x}}\right) + C.$
1638.  $-\ln|\cos x + 2 + \sqrt{\cos^2 x + 4\cos x + 1}| + C.$
1643. а), в), г).      1644. б), в).      1649.  $-x\cos x + \sin x + C.$
1650.  $\frac{x}{2}\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + C.$       1651.  $\frac{5^x}{\ln^2 5}(x\ln 5 - 1) + C.$
1653.  $x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.$       1654.  $\frac{1}{2}(x + (x^2+1)\operatorname{arctg} x) + C.$
1655.  $-x\operatorname{ctg} x + \ln|\sin x| + C.$       1656.  $\frac{e^{3x}}{27}(9x^2 - 6x + 1) + C.$
1657.  $\frac{x^2}{4} + \frac{1}{4}x\sin 2x + \frac{1}{8}\cos 2x + C.$       1658.  $x\ln(x^2+1) - 2x + 2\operatorname{arctg} x + C.$
1659.  $\frac{x^3+1}{3}\ln(1+x) - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{6} - \frac{x}{3} + C.$       1660.  $\frac{e^x}{a^2+b^2}(a\sin bx - b\cos bx) + C.$
1661.  $\frac{x}{2}(\sin \ln x - \cos \ln x) + C.$       1662.  $\left(\frac{x^3}{3} - x^2 + 3x\right)\ln x - \frac{x^3}{9} + \frac{x^2}{2} - 3x + C.$
1663.  $-2\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x} + \sqrt{2} + C.$       1664.  $\frac{e^{-x}}{2}\left(\frac{\cos 2x - 2\sin 2x}{5} - 1\right) + C.$
1665.  $-\frac{x+1}{e^x} + C.$       1666.  $\frac{2x^2-1}{4}\arcsin x + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{4} + C.$
1667.  $x\operatorname{arctg} x - \sqrt{x} + \operatorname{arctg}\sqrt{x} + C.$       1668.  $2\sqrt{x}(\ln x - 2) + C.$

1669.  $(6 - 4x)\cos\frac{x}{2} + 8\sin\frac{x}{2} + C.$       1670.  $-\frac{2x+1}{4}e^{-2x} + C.$
1671.  $x \operatorname{tg} x + \ln|\cos x| + C.$       1672.  $x^2\sqrt{1+x^2} - \frac{2}{3}\sqrt{(1+x^2)^3} + C.$
1673.  $x(\ln^2 x - 2\ln x + 2) + C.$       1674.  $\frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left(x + \sqrt{a^2+x^2}\right) + C.$
1675.  $\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C.$       1676.  $\frac{1}{2}\arcsin x - \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + C.$
1677.  $\frac{x-2}{x+2}e^x + C.$       1678.  $-(x + \operatorname{ctg} x \cdot \ln(e \cdot \sin x)) + C.$
1679.  $\frac{1}{2}\arctg x - \frac{x}{2(1+x^2)} + C.$       1680.  $\frac{x}{2a^2(a^2+x^2)} + \frac{1}{2a^3}\arctg\frac{x}{a} + C.$
1681.  $\frac{1}{2}\ln(1+e^{2x}) - e^{-x}\arctg e^x - x + C.$       1682.  $2(\sqrt{x+1} - \ln(1+\sqrt{x+1})) + C.$
1683.  $\frac{3}{2}(x+1)^{\frac{2}{3}} + 3(x+1)^{\frac{1}{3}} + 3\ln|1+\sqrt[3]{x+1}| + C.$       1684.  $2\sin\sqrt{x} + C.$
1685.  $-\ln(1+e^{-x}) + C.$       1686.  $\frac{4}{21}(3e^x-4)\sqrt[4]{(e^x+1)^3} + C.$
1687.  $-\frac{1}{2}\ln|1-\ln^2 x| + C.$       1688.  $\frac{2}{3}\sqrt{e^x+1}(e^x-2) + C.$
1689.  $\ln\left|\frac{\sqrt{x-1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\right| + C.$       1690.  $2\arctg\sqrt{x} + C.$
1691.  $\frac{2}{a}\left(\sqrt{ax+b} - m\ln|\sqrt{ax+b}+m|\right) + C.$
1692.  $2\sqrt{1+\ln x} - \ln|\ln x| + 2\ln|\sqrt{1+\ln x}-1| + C.$
1693.  $\ln\left|\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}\right| + C.$       1694.  $\frac{1}{4}\left(\frac{(2x+5)^{12}}{12} - \frac{5(2x+5)^{11}}{11}\right) + C.$
1695.  $\frac{2}{5}(\cos^2 x - 5)\sqrt{\cos x} + C.$       1696.  $\frac{\arcsin^3 x}{3} + C.$
1697.  $\ln(1+e^x) - e^{-x} - x + C.$       1698.  $-\frac{6+25x^2}{1000}(2-5x^3)^{\frac{5}{3}} + C.$
1699.  $\ln\frac{|x|}{1+\sqrt{x^2+1}} + C.$       1700.  $\ln\left|\frac{xe^x}{1+xe^x}\right| + C.$

1701.  $2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)+C.$       1702.  $3\left(\left(2-\sqrt[3]{x^2}\right)\cos\sqrt[3]{x}+2\sqrt[3]{x}\sin\sqrt[3]{x}\right)+C.$
1703.  $\frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{2}\ln|1-x^2|+C.$       1704.  $x \operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}^2 x+C.$
1705.  $\ln\frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{1}{x}\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}^2 x+C.$
1706.  $\frac{1}{4}\left(\ln(1+x^2)+\frac{1}{1+x^4}\right)+C.$       1707.  $e^{e^x}+C.$
1708.  $(\ln x)(\ln \ln x-1)+C.$       1709.  $C-\frac{1}{2}e^{-x^2}(x^4+2x^2+2).$
1710.  $\frac{4}{3}\left(\sqrt[4]{x^3}-\ln\left(\sqrt[4]{x^3}+1\right)\right)+C.$       1714. а), в), г).      1715. б).
1716. г).      1720. г), д).      1722. в), е).
1723.  $\ln\left|\frac{(x-1)^4(x-4)^3}{(x+3)^7}\right|+C.$       1724.  $\frac{3}{11}\ln|3x+1|+\frac{2}{33}\ln|2x-3|-\frac{1}{3}\ln|x|+C.$
1725.  $\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+\ln\left|\frac{x^2(x-2)^5}{(x+2)^3}\right|+C.$
1726.  $\frac{1}{4}x+\ln|x|-\frac{7}{16}\ln|2x-1|-\frac{9}{16}\ln|2x+1|+C.$       1727.  $\ln\sqrt{\frac{x^2-2}{x^2-1}}+C.$
1728.  $\frac{x^2}{2}-2x+\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-1}{(x+1)^3}\right|+\frac{16}{3}\ln|x-2|+C.$
1729.  $\frac{1}{12}\ln\left|\frac{(x-1)(x+3)^3}{(x+2)^4}\right|+C.$       1730.  $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right|+\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}}\right|+C.$
1731.  $5x+\ln\left|\frac{\sqrt{x}(x-4)^{\frac{161}{6}}}{\sqrt[3]{(x-1)^7}}\right|+C.$       1732.  $\ln\left|\frac{x^2}{x+1}\right|+\frac{6}{x+1}+C.$
1733.  $4\ln|x|-3\ln|x-1|-\frac{9}{x-1}+C.$       1734.  $-\frac{x}{(x-1)^2}+\ln\frac{(x-1)^2}{|x|}+C.$
1735.  $\frac{4}{x+2}+\ln|x+1|+C.$       1736.  $\frac{1-2x}{(x-1)^2}+\ln|x-1|+C.$
1737.  $-\frac{5x+12}{x^2+6x+8}+\ln\left(\frac{x+4}{x+2}\right)^2+C.$       1738.  $\ln\frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}}+C.$
1739.  $\frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C.$

$$1740. \frac{1}{3} \ln \frac{|x-1|}{\sqrt{x^2+x+1}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

$$1741. \frac{1}{4} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + C.$$

$$1742. \frac{1}{2} \ln |x+1| - \frac{1}{4} \ln(x^2+1) - \frac{1}{2(x+1)} + C.$$

$$1743. \frac{1}{4} \ln \frac{x^4}{(x+1)^2(x^2+1)} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + C.$$

$$1744. \frac{1}{3} \left( \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} \right) + C.$$

$$1745. \ln \frac{|x| \sqrt{x^2-x+1}}{(x+1)^2} + \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.$$

$$1746. 3 \ln \frac{\sqrt{x^2-2x+5}}{|x|} + 2 \operatorname{arctg} \frac{x-1}{2} + C.$$

$$1747. \frac{2-x}{4(x^2+2)} + \frac{\ln(x^2+2)}{2} + \frac{1}{4\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} + C.$$

$$1748. \frac{x(15x^2+40x^6+33)}{48(1+x^2)^3} + \frac{15}{48} \operatorname{arctg} x + C.$$

$$1749. \ln \left| \frac{(x-4)^{11}}{(x-3)^9} \right| + C.$$

$$1750. \ln \left| \frac{x^3(x-1)}{x+1} \right| + C.$$

$$1751. \frac{x^2}{2} + 4x + \ln \frac{(x-1)^8}{|x|} + C.$$

$$1752. \frac{1}{x} + \ln \left| \frac{x-2}{x} \right| + C.$$

$$1753. \frac{2}{x-1} + \ln |x(x-1)| + C.$$

$$1754. \frac{3x-8}{6(x-2)^3} + \ln |x-2| + C.$$

$$1755. \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+2} \right| + C.$$

$$1756. \ln \frac{\sqrt{(x^2-2x+5)^3}}{|x-1|} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x-1}{2} + C.$$

$$1757. \frac{(x+1)^2}{2} \ln \frac{|x-1|}{\sqrt{x^2+1}} - \operatorname{arctg} x + C.$$

$$1758. \ln \left( |x+1| \sqrt{x^2+4} \right) + C.$$

$$1759. \frac{1}{24} \ln \frac{(x+2)^2}{x^2-2x+4} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x-1}{\sqrt{3}} + C.$$

$$1760. \ln \frac{\sqrt{x^2+1}}{|x+1|} - \frac{1}{x+1} + \operatorname{arctg} x + C.$$

$$1761. \frac{1}{8} \left( \frac{13x-159}{x^2-6x+13} + \frac{53}{2} \operatorname{arctg} \frac{x-3}{2} \right) + C.$$

1762.  $\frac{1}{36} \left( \frac{x}{6(x^2+9)} + \frac{x}{(x^2+9)^2} + \frac{1}{18} \operatorname{arctg} \frac{x}{3} \right) + C.$
1763.  $\sin^3 x \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{5} \sin^2 x \right) + C.$       1764.  $\frac{1}{12} \sin^4 x (3 - 2 \sin^2 x).$
1765.  $\frac{3}{2} x + \cos 2x - \frac{1}{8} \sin 4x + C.$       1766.  $-\frac{1}{\sin x} - \sin x + C.$
1767.  $\sin x - \sin^3 x + \frac{3}{5} \sin^5 x - \frac{1}{7} \sin^7 x + C.$
1768.  $\frac{1}{32} (12x + 8 \sin 2x + \sin 4x) + C.$
1769.  $\frac{1}{3 \cos^3 x} - \frac{2}{\cos x} - \cos x + C.$       1770.  $3x + 4 \sin x + \sin 2x + C.$
1771.  $\frac{1}{2} \left( x + \frac{1}{10} \sin 10x \right) + C.$       1772.  $\frac{1}{8} \left( x - \frac{1}{4} \sin 4x \right) + C.$
1773.  $\frac{1}{32} (12x - 8 \sin 2x + \sin 4x) + C.$       1774.  $-\frac{1}{5} \cos^5 x + \frac{2}{3} \cos^3 x - \cos x + C.$
1775.  $\frac{1}{8} \cos^8 x - \frac{1}{6} \cos^6 x + C.$       1776.  $-\frac{1}{5} \cos^5 x + \frac{1}{7} \cos^7 x + C.$
1777.  $-\frac{1}{3} \operatorname{ctg}^3 y + \operatorname{ctg} y + y + C.$       1778.  $\frac{1}{2} \left( \sin x - \frac{1}{11} \sin 11x + C \right).$
1779.  $\frac{\cos(a-b)t}{2(b-a)} - \frac{\cos(a+b)t}{2(a+b)} + C.$       1780.  $\ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C.$
1781.  $\frac{1}{4} \ln \left| \frac{2 + \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{2 - \operatorname{tg} \frac{x}{2}} \right| + C.$       1782.  $\operatorname{arctg} \left( 1 + \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) + C.$       1783.  $\ln \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 5}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 3} \right| + C.$
1784.  $\frac{1}{8} \left( 4 \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| - \operatorname{ctg}^2 \frac{x}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} \right) + C.$       1785.  $2\sqrt{\operatorname{tg} x} + C.$
1786.  $C - \frac{1}{3} \operatorname{tg} x (2 + \operatorname{tg}^2 x) \sqrt{4 - \operatorname{ctg}^2 x}.$       1787.  $4\sqrt[4]{\operatorname{tg} x} + C.$
1788.  $\frac{11}{2} x + 3 \sin 2x + \frac{9}{8} \sin 4x + C.$       1789.  $\sin x - \frac{2}{3} \sin^3 x + \frac{1}{5} \sin^5 x + C.$
1790.  $\frac{1}{12} (6x - \sin 6x) + C.$       1791.  $\frac{3}{26} \sin \frac{13}{3} x + \frac{3}{10} \sin \frac{5}{3} x + C.$
1792.  $\frac{1}{16} \left( x - \frac{\sin 4x}{4} + \frac{\sin^3 2x}{3} \right) + C.$       1793.  $\frac{1}{2} (\sin^2 x - \operatorname{cosec}^2 x - 4 \ln |\sin x|) + C.$

$$\begin{aligned}
1794. \quad & \frac{1}{5} \operatorname{tg} 5x - x + C. & 1795. \quad & -\frac{\operatorname{ctg}^2 x}{2} - \ln |\sin x| + C. \\
1796. \quad & 7x + 14 \sin x + 3 \sin 2x - \frac{8}{3} \sin^3 x + C. \\
1797. \quad & \ln \left| \operatorname{tg} \left( \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C. & 1798. \quad & \frac{(\operatorname{tg}^2 x - 1)(\operatorname{tg}^4 x + 10 \operatorname{tg}^2 x + 1)}{3 \operatorname{tg}^3 x} + C. \\
1799. \quad & C - \frac{1}{2} \left( \operatorname{ctg} x + \frac{1}{\sqrt{2}} \arctg \left( \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}} \right) \right) & 1800. \quad & \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \operatorname{tg} \left( \frac{x}{2} + \frac{\pi}{8} \right) \right| + C. \\
1801. \quad & x - \operatorname{tg} \frac{x}{2} + C. & 1802. \quad & \frac{2}{\sqrt{15}} \arctg \frac{1 + 2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\sqrt{15}} + C. \\
1803. \quad & C - \frac{1}{8} \operatorname{ctg}^2 \left( \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) + \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \left( \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + \frac{1}{8} \operatorname{tg}^2 \left( \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \\
1804. \quad & 2\sqrt{x-2} + \sqrt{2} \arctg \sqrt{\frac{x-2}{2}} + C & 1805. \quad & 2\sqrt{x} - 2\sqrt{2} \arctg \sqrt{\frac{x}{2}} + C. \\
1806. \quad & \frac{x+2}{5} \sqrt[3]{(3x+1)^2} + C. & 1807. \quad & \frac{2x+1}{12} (2\sqrt{2x+1} - 3) + C. \\
1808. \quad & \frac{1}{3} (x-2) \sqrt{2x-1} + C. & 1809. \quad & \frac{1}{2} \sqrt[3]{(3x+1)^2} + \sqrt[3]{3x+1} + \ln \left| \sqrt[3]{3x-1} - 1 \right| + C. \\
1810. \quad & -2 \arctg \sqrt{1-x} + C. & 1811. \quad & \ln \left| \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{1-x}} \right| + 2 \arctg \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + C. \\
1812. \quad & \ln \frac{x}{(1 + \sqrt[10]{x})^{10}} + \frac{10}{\sqrt[10]{x}} - \frac{5}{\sqrt[5]{x}} + \frac{10}{3\sqrt[10]{x^3}} - \frac{5}{2\sqrt[5]{x^2}} + C. \\
1813. \quad & x + \frac{6}{5} \sqrt[6]{5} + \frac{3}{2} \sqrt[3]{x} + 2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} + 6 \ln \left| \sqrt[6]{x} - 1 \right| + C. \\
1814. \quad & 2\sqrt{x} - 4\sqrt[4]{x} + \ln \left| 1 + \sqrt[4]{x} \right| + C. & 1815. \quad & \frac{12}{5} \left( 2\sqrt[6]{x^5} + \sqrt[12]{x^5} + \ln \left| \sqrt[12]{x^5} - 1 \right| \right) + C. \\
1816. \quad & 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - \ln \left| 1 + \sqrt[6]{x} \right| + C. \\
1817. \quad & 6 \left( \frac{1}{9} \sqrt{(x+1)^3} - \frac{1}{8} \sqrt[3]{(x+1)^4} + \frac{1}{7} \sqrt[6]{(x+1)^7} - \frac{1}{6} (x+1) + \frac{1}{5} \sqrt[6]{(x+1)^5} - \frac{1}{4} \sqrt[3]{(x+1)^2} \right) + C. \\
1818. \quad & 6\sqrt[3]{(1+x)^2} \left( \frac{(x+1)^2}{16} - \frac{1+x}{5} + \frac{\sqrt{1+x}}{7} + \frac{1}{4} \right) + C.
\end{aligned}$$

1819.  $2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} - 8\sqrt[4]{x} + 6\sqrt[6]{x} + 48\sqrt[12]{x} + 3\ln(1 + \sqrt[12]{x}) + \frac{33}{2}\ln(\sqrt[6]{x} - \sqrt[12]{x} + 2) - \frac{171}{1}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt[12]{x}-1}{\sqrt{7}} + C.$
1820.  $\frac{6}{7}\sqrt[6]{x^7} - \frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5} - \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} - 6\sqrt[6]{x} - 3\ln|1 + \sqrt[3]{x}| + C.$
1821.  $\frac{1}{3}\ln\frac{t^2+t+1}{(t-1)^2} + \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}} + \frac{2t}{t^2-1} + C, \text{ где } t = \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}.$
1822.  $\frac{3}{2(2t+1)} + \frac{1}{2}\ln\frac{t^4}{(2t+1)^3} + C, \text{ где } t = x + \sqrt{x^2 + x + 1}.$
1823.  $\ln\left|\frac{t-1}{t}\right| - 2\operatorname{arctg} t + C, \text{ где } t = \frac{1 + \sqrt{1-2x-x^2}}{x}.$
1824.  $\frac{1}{8}\left(\frac{1}{3}(t-1)^3 + (t-1)^{-3}\right) + (t-1)^2 - (t-1)^{-2} + t - 1 + (t-1)^{-1} + \frac{1}{2}\ln|t-1| + C,$   
где  $t = x + \sqrt{x^2 - 2x + 2}.$
1825.  $C - \frac{1}{\sqrt{15}}\ln\left|\frac{x+6+\sqrt{60x-15x^2}}{2x-3}\right|.$
1826.  $\frac{1-\sqrt{x^2+2x+2}}{x+1} + \ln(x+1+\sqrt{x^2+2x+2}) + C.$
1827.  $C - \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2+x-x^2}+\sqrt{2}}{x} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\right|.$
1828.  $C - \frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{3+3x+2\sqrt{3(x^2+x+1)}}{x-1}\right|.$
1829.  $\ln\frac{|x|}{2+x+2\sqrt{x^2+x+1}} + C.$
1830.  $C - \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin x.$
1831.  $C - \frac{\sqrt{(1+x^2)^3}}{3x^3};$
1832.  $\sqrt{x^2-a^2} - a\arccos\frac{a}{x} + C.$
1833.  $\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin x + C.$

1834.  $\frac{x}{4}(x^2 - 2)\sqrt{4 - x^2} + 2\arcsin \frac{x}{2} + C.$       1835.  $\frac{x}{a^2\sqrt{x^2 + a^2}} + C.$
1836.  $C - \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{a^2x}.$       1837.  $\frac{a^2}{2}\arcsin \frac{x}{a} - \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + C.$
1838.  $C - \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x} - \arcsin x.$       1839.  $C - \frac{\sqrt{(9 - x^2)^5}}{45x^5}.$
1840.  $C - \frac{\sqrt{(x^2 - 9)}}{9x}.$       1841.  $C - \frac{x}{a^2\sqrt{x^2 - a^2}}.$
1842.  $2\arcsin \frac{x}{2} - \frac{x}{2}\sqrt{4 - x^2} + C.$       1843.  $C - \frac{\sqrt{1 + x^2}}{x}.$
1844.  $\frac{x}{4\sqrt{4 + x^2}} + C.$       1845.  $\frac{x^3}{3a^2\sqrt{(a^2 + x^2)^3}} + C.$
1846.  $\frac{x}{\sqrt{2 - x^2}} - \arcsin \frac{x}{\sqrt{2}} + C.$       1847.  $C - \frac{1}{10} \frac{x}{\sqrt{x^2 - 10}}.$
1848.  $\frac{1}{a} \arccos \frac{a}{x} + C.$       1849.  $\frac{3}{7} \left( 4\sqrt{x} + \sqrt[4]{x} - 3 \right) \sqrt[3]{1 + \sqrt[4]{x}} + C.$
1850.  $\frac{1}{8} \sqrt[3]{(1 + x^3)^8} - \frac{1}{5} \sqrt[3]{(1 + x^3)^5} + C.$
1851.  $\frac{6}{5} \sqrt[6]{x^5} - 4\sqrt{x} + 18\sqrt[6]{x} + \frac{3\sqrt[6]{x}}{1 + \sqrt[3]{x}} - 21 \arctg \sqrt[6]{x} + C.$
1852.  $\frac{3}{5}t^5 - 2t^3 + 3t + C, \text{ где } t = \sqrt{1 + \sqrt[3]{x^2}}.$
1853.  $C - t + \frac{2}{3}t^3 - \frac{t^5}{5}, \text{ где } t = \sqrt{1 - x^2}.$
1854.  $\frac{1}{6} \ln \frac{t^2 + t + 1}{(t - 1)^2} - \frac{1}{\sqrt{3}} \arctg \frac{2t + 1}{\sqrt{3}} + C, \text{ где } t = \frac{\sqrt[3]{1 + x^3}}{x}.$
1855.  $\frac{1}{4} \ln \left| \frac{t + 1}{t - 1} \right| - \frac{1}{2} \arctg t + C, \text{ где } t = \frac{\sqrt[4]{1 + x^4}}{x}.$
1856.  $\frac{1}{6} \ln \frac{t - 1}{t + 1} + \frac{1}{12} \ln \frac{t^2 + t + 1}{t^2 - t + 1} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \arctg \frac{t^2 - 1}{2\sqrt{3}} + C, \text{ где } t = \frac{\sqrt[4]{1 + x^4}}{x}.$

$$1857. \frac{5}{4}t^2 - \frac{5}{9}t^9 + C, \text{ де } t = \sqrt[5]{1 + \frac{1}{x}}.$$

$$1858. \frac{1+x^2}{2\sqrt{1+2x^2}} + C.$$

$$1859. \frac{(2x^2-1)\sqrt{1+x^2}}{3x^2} + C.$$

$$1860. C - \frac{4+3x^2}{8x^3\sqrt{(2+x^3)^2}}.$$

$$1862. \text{ а), д).}$$

$$1865. \text{ а), в).}$$

$$1868. \text{ а), г), д).}$$

$$1870. \text{ б), д).}$$

$$1871. \text{ а), в), д).}$$

$$1875. \text{ б).}$$

$$1880. \text{ а), б), г), д).}$$

$$1882. \text{ а) розбіжний; б) розбіжний; в) збіжний; г) збіжний; д) збіжний.}$$

$$1886. \frac{1}{160}.$$

$$1887. \frac{1}{9} \left( (1+e^3)^3 - 8 \right).$$

$$1888. 2.$$

$$1889. 1.$$

$$1890. \arctg e - \frac{\pi}{4}.$$

$$1891. \frac{\pi}{4}.$$

$$1892. 2 \left( 1 - \ln \frac{3}{2} \right)$$

$$1893. \frac{27}{4} + \ln 2.$$

$$1894. 7 + 2 \ln 2.$$

$$1895. \frac{17}{6}.$$

$$1896. 2 - \pi + 4 \arctg \frac{1}{2}.$$

$$1897. \frac{1 - \ln 2}{2}.$$

$$1898. \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$1899. \frac{\sqrt{2}}{8}.$$

$$1900. \sqrt{2} - \frac{2}{\sqrt{3}} + \ln \frac{2+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}}.$$

$$1901. \ln \frac{7+2\sqrt{7}}{9}.$$

$$1902. \sqrt{3} - \frac{1}{2} \ln(2+\sqrt{3}).$$

$$1903. \frac{\pi}{4}.$$

$$1904. 2(1 - \ln 2).$$

$$1905. \frac{1}{9}(2e^3 + 1).$$

$$1906. \frac{e^2 + 3}{8}.$$

$$1907. \frac{1}{4}(\pi - 2 \ln 2).$$

$$1908. \frac{4}{e}.$$

$$1909. \frac{1}{4}(\pi - 2 \ln 2).$$

$$1910. \frac{\pi}{4} - 1.$$

$$1911. \frac{1}{2}(e^\pi + 1).$$

$$1912. \frac{\pi}{9} - \frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

$$1913. 2.$$

$$1914. 2e(e-1).$$

$$1915. \frac{1}{3}a^3.$$

$$1916. \frac{1}{3}.$$

$$1917. \frac{\pi}{4}.$$

$$1918. \ln 2.$$

$$1919. 2 - \ln 2.$$

$$1920. \frac{32}{3}.$$

$$1921. 2(1 + \ln 2).$$

$$1922. \frac{5}{3} - 2 \ln 2.$$

$$1923. 4 - 2 \ln 3.$$

$$1924. \frac{25}{4}\pi.$$

1925.  $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$ . 1926. 1. 1927.  $-\pi$ .
1928.  $\frac{1}{9}(2e^3+1)$ . 1929.  $2\ln 2-1$ . 1930.  $2-e^{-1}$ .
1931.  $-\frac{2}{9}$ . 1932.  $\frac{e^2}{4}$ . 1933.  $\frac{1}{4}(\pi+2\ln 2)$ .
1934.  $\frac{\pi}{2}-1$ . 1935.  $\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$ . 1936.  $\frac{\pi}{16}$ .
1937.  $\frac{\sqrt{6}}{27}+\frac{\pi\sqrt{2}}{48}$ . 1938.  $\arctg \frac{1}{2}$ . 1939.  $\frac{\pi}{6}$ . 1940.  $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$ .
1941. а) «-»; б) «+»; в) «+»; г) «-»; д) «+».
1942. а), в), г). 1943. а)  $\frac{1}{3}$ ; б)  $\frac{20}{3}$ ; в) 0,5; г) 0,375; д) 10.
1944. а) 0,71877; 0,66877; 0,69377; б) 3,23992; 3,03992; 3,13992.
1945. а) 0,8109; б) 0,69315; в) 1,4675.
1946. Розбіжний. 1947.  $\frac{1}{\ln a}$ .
1948.  $\frac{1}{k}$ . 1949.  $\frac{\pi^2}{8}$ .
1950.  $\frac{\pi}{2}$ . 1951. 4.
1952.  $\ln 2$ . 1953. Розбіжний.
1954. Розбіжний. 1955.  $\frac{1}{\ln 2}$ .
1956. Розбіжний. 1957.  $6\sqrt[3]{2}$ .
1958. 1. 1959.  $\frac{\pi}{4}$ .
1960. Розбіжний. 1961.  $\frac{\pi}{\sqrt{5}}$ .
1962. Розбіжний. 1963. 0,5.
1964. 16. 1965. Розбіжний.
1966.  $\frac{\pi}{2}$ . 1967. 6.
1968. Розбіжний. 1969.  $\frac{1}{4}(\pi+2\ln 2)$ .
1970. Збіжний. 1971. Розбіжний.
1972. Збіжний. 1973. Збіжний.
1974. Розбіжний. 1975. Збіжний.

1976. Розбіжний.

1977. Розбіжний.

1978. Збіжний.

1979. Розбіжний.

1980. 1)  $\sqrt{\pi}$ ; 2) 1; 3) 1.

1981. а)  $\frac{1}{t} \sin \frac{\pi t}{2}$ ; б)  $\frac{2}{t} \ln(1+t^2)$ ; в)  $\frac{e^{2t} - e^t}{t}$ ; г)  $2 \arctg \frac{1}{t}$ .

1983. а), б), в).

1989. Правильні по відношенню до  $Ox$ : а), б), в), г); правильні по відношенню до  $Oy$ : а), г), е).

1991.  $\frac{14}{3}$ .

1992.  $\ln \frac{25}{24}$ .

1993.  $\frac{\pi}{12}$ .

1994.  $\frac{9}{4}$ .

1995. 50,4.

1996.  $\frac{\pi a^2}{2}$ .

1997.  $\frac{\pi}{6}$ .

1998. 2,4.

1999. 18.

2000.  $\frac{1}{110}$ .

2001.  $x = \frac{y^2}{4} - 1$ ;  $x + y = 2$ ;  $y = -6$ ;  $y = 2$ .

2002.  $y = x^2$ ;  $y = x + 9$ ;  $x = 1$ ;  $x = 3$ .

2003.  $y = x$ ;  $x + y = 10$ ;  $y = 0$ ;  $y = 4$ .

2004.  $y = \frac{x}{3}$ ;  $y = 2x$ ;  $x = 1$ ;  $x = 3$ .

2005.  $x = y = 0$ ;  $y = \sqrt{25 - x^2}$ ;  $x = 3$ .

2006.  $y = x^2$ ;  $y = x + 2$ ;  $x = -1$ ;  $x = 2$ .

2007.  $\int_0^2 dy \int_{\frac{y}{2}}^y f(x; y) dx + \int_2^4 dy \int_{\frac{y}{2}}^2 f(x; y) dx$ .

2008.  $\int_{-1}^0 dy \int_{-2\sqrt{1+e}}^{2\sqrt{1+y}} f(x; y) dx + \int_0^8 dy \int_{-2\sqrt{1+y}}^{2-y} f(x; y) dx$ .

2009.  $\int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{\sqrt[3]{y}} f(x; y) dx$ .

2010.  $\int_{-1}^0 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x; y) dx + \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} f(x; y) dx$ .

$$2011. \int_0^1 dy \int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x; y) dx.$$

$$2012. \int_0^1 dy \left( \int_{\frac{y^2}{2}}^{1-\sqrt{1-y^2}} f(x; y) dx + \int_{1+\sqrt{1-y^2}}^2 f(x; y) dx \right) + \int_1^2 dy \int_{\frac{y^2}{2}}^2 f(x; y) dx.$$

$$2013. \int_0^1 dy \int_{e^y}^e f(x; y) dx.$$

$$2014. \int_0^1 dy \int_{\arcsin y}^{\pi - \arcsin y} f(x; y) dx - \int_{-1}^0 dy \int_{\pi - \arcsin y}^{2\pi + \arcsin y} f(x; y) dx.$$

$$2015. 2.$$

$$2016. -\frac{2}{3}.$$

$$2017. \ln \frac{4}{3}.$$

$$2018. \frac{\pi}{2}.$$

$$2019. \ln \frac{8}{3} - 1.$$

$$2020. \frac{5}{4}.$$

$$2021. 0,5.$$

$$2022. -\frac{4}{105}.$$

$$2023. \frac{1}{40}.$$

$$2024. -\frac{1}{3}.$$

$$2025. \frac{7}{20}.$$

$$2026. 19.$$

$$2027. \frac{5}{8}(2 \ln 2 - 1).$$

$$2028. \frac{496}{5}.$$

$$2029. -\frac{11}{24}.$$

$$2030. \frac{19}{120}.$$

$$2031. \frac{68}{15}.$$

$$2032. 0.$$

$$2033. \frac{33}{140}.$$

$$2034. \frac{9}{4}.$$

$$2035. -2.$$

$$2036. \frac{\pi}{6}.$$

$$2037. \frac{4}{135}.$$

$$2038. \frac{\pi}{2}.$$

$$2039. \frac{\pi}{6}.$$

$$2040. \frac{3}{2}.$$

$$2041. 14.$$

$$2042. 4.$$

$$2043. \frac{1}{16}(8 \ln 2 - 5).$$

$$2044. \frac{1}{180}.$$

$$2045. \frac{\pi^2 - 8}{16}.$$

$$2046. \frac{\pi}{4}.$$

$$2047. \text{a) } \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho; \text{б) } \int_{\frac{\pi}{4}}^{\arctg 2} d\varphi \int_{4 \cos \varphi}^{8 \cos \varphi} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho;$$

$$\text{в) } \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\sec 4} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho;$$

$$\text{г) } \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_{\sqrt{2} \sec\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)}^2 f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho;$$

$$д) \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_a^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho.$$

$$2048. \frac{\pi}{4} \left( (1+R^2) \ln(1+R^2) - R^2 \right).$$

$$2049. \frac{\pi(\pi-2)}{8}.$$

$$2050. 8\pi.$$

$$2051. 9\pi - 12.$$

$$2052. \frac{\pi^2}{6}.$$

$$2053. r).$$

$$2054. B).$$

$$2059. \ln \frac{e^2 + 1}{e}.$$

$$2060. \frac{e^2 - e^{-2}}{2}.$$

$$2061. \frac{1}{2} \left( \sqrt{6} + \ln(\sqrt{2} + \sqrt{3}) \right).$$

$$2062. 1 + \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}.$$

$$2063. \ln 3 - \frac{1}{2}.$$

$$2064. \sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2}).$$

$$2065. \frac{\sqrt{1+e^2} - \sqrt{2} + \ln \left( \frac{(\sqrt{1+e^2} - 1)(\sqrt{2} + 1)}{e} \right)}{e}.$$

$$2066. \ln \left( e + \sqrt{e^2 - 1} \right).$$

$$2067. \frac{1}{4} (e^2 + 1).$$

$$2068. \ln \operatorname{tg} \frac{5\pi}{12}.$$

$$2069. \frac{8}{27} (10\sqrt{10} - 1).$$

$$2070. 6.$$

$$2071. 2.$$

$$2072. \frac{670}{27}.$$

$$2073. \frac{64}{3}.$$

$$2074. \frac{16}{3}.$$

$$2075. \frac{125}{6}.$$

$$2076. e + e^{-1} - 2.$$

$$2077. 36.$$

$$2078. \frac{8}{3}.$$

$$2079. \frac{9}{2}.$$

$$2080. 9(1 + \ln 2).$$

$$2081. \pi ab.$$

$$2082. \frac{16}{3}.$$

$$2083. 19, 2.$$

$$2084. \frac{125}{6}.$$

$$2085. 0, 8.$$

$$2086. 2\pi + \frac{4}{3}; 6\pi - \frac{4}{3}.$$

$$2087. \frac{32}{3} \sqrt{6}.$$

$$2088. 8 \ln 2.$$

$$2089. \frac{9}{2}.$$

$$2090. \frac{32}{3}.$$



2091.  $\frac{64}{3}$ .  
 2094.  $\frac{2}{3}$ .  
 2097.  $\frac{32}{3}$ .  
 2100.  $\frac{16}{3}$ .  
 2103.  $\frac{16\pi}{15}$ .  
 2106.  $\frac{8\pi a^3}{3}$ .  
 2109.  $32\pi$ .  
 2112.  $\frac{\pi^2}{2}$ .  
 2115.  $0,3\pi$ .  
 2118.  $\frac{1}{6}$ .  
 2121.  $2$ .  
 2124.  $\frac{5}{8}\pi$ .  
 2127.  $\frac{200}{3}$ .  
 2130.  $\frac{5}{3}$ .  
 2133.  $\frac{1}{6}$ .  
 2136.  $16$ .  
 2139.  $\frac{7}{12}$ .  
 2142.  $\frac{\pi}{2}$ .  
 2146. в) — загальний; а), б), г), д) — частинні.  
 2152. б) — загальний; а), в), д) — частинні; г) — особливий.  
 2153. Так. 2154. Ні. 2155. Так. 2156. Так.  
 2157. Ні. 2158. Так. 2159. Так. 2160. Так.  
 2162.  $y - xy' = 0$ . 2163.  $y - 2xy' = 0$ .  
 2164.  $x dx + y dy = 0$ . 2165.  $y' = y$ .
2092.  $4 - 3\ln 3$ .  
 2095.  $\frac{1}{3}$ .  
 2098.  $e + \frac{1}{e} - 2$ .  
 2101.  $\frac{8\pi a^2 b}{3}$ .  
 2104.  $\frac{64}{5}\pi$ .  
 2107.  $\frac{4}{3}\pi a^2 b$ .  
 2110.  $\frac{32}{5}\pi$ .  
 2113.  $19,2\pi$ .  
 2116.  $24\pi$ .  
 2119.  $\sqrt{2} - 1$ .  
 2122.  $6\pi$ .  
 2125.  $\frac{2}{3}$ .  
 2128.  $\frac{88}{105}$ .  
 2131.  $1$ .  
 2134.  $78\frac{15}{32}$ .  
 2137.  $45$ .  
 2140.  $\frac{3}{35}$ .  
 2143. г).
2093.  $8$ .  
 2096.  $2\sqrt{3}$ .  
 2099.  $17,5 - 6\ln 6$ .  
 2102.  $12\pi$ .  
 2105.  $\frac{500}{3}\pi$ .  
 2108.  $\frac{\pi}{4}$ .  
 2111.  $18\pi$ .  
 2114.  $\frac{64}{3}\pi$ .  
 2117.  $4,5$ .  
 2120.  $0,5$ .  
 2123.  $\frac{16}{3}$ .  
 2126.  $\frac{1}{1260}$ .  
 2129.  $186\frac{2}{3}$ .  
 2132.  $12$ .  
 2135.  $\frac{48}{5}\sqrt{6}$ .  
 2138.  $8$ .  
 2141.  $4(4 - 3\ln 3)$ .

$$2166. 3y^2 - x^2 = 2xyy'.$$

$$2168. y'' + 4y = 0.$$

$$2171. y^2 - x^2 = 25.$$

$$2173. y = \frac{1}{6}(-5e^{-x} + 9e^x - 4e^{2x}).$$

$$2176. y = \sqrt{4 - x^2} + 2 \ln \left| \frac{2 - \sqrt{4 - x^2}}{x} \right|.$$

$$2177. y^2 = Cx.$$

$$2179. y = \frac{x^3}{3}.$$

$$2182. x^2 + y^2 = C \text{ або } x^2 - y^2 = C.$$

$$2184. 40 \text{ хв.}$$

$$2185. 0,467 \frac{\text{км}}{\text{год}}.$$

$$2186. \frac{8}{9} \text{ об/с.}$$

2194. б), в), г) — з відокремленими змінними; а), ж) — однорідні; д), е) — лінійні; в) — Бернуллі; є) — у повних диференціалах.

$$2196. \operatorname{ctg}^2 y = \operatorname{tg}^2 x + C.$$

$$2197. y = Cx.$$

$$2198. y = Ce^{-x^2}.$$

$$2199. y^2 + x^2 = 0.$$

$$2200. y = Ce^{2x}.$$

$$2201. \frac{y^3}{3} = \frac{x^4}{4} + C.$$

$$2202. y = Ce^{-1/x}.$$

$$2203. y^2 = 2 \ln |x| + x^2 + C.$$

$$2204. y = Ce^{-1/x^2}.$$

$$2205. y = Cx^2.$$

$$2206. y = C \sin x.$$

$$2207. \frac{1}{y^2} = \frac{1}{x^2} + C.$$

$$2208. y = Ce^{\sqrt{x}}.$$

$$2209. y = Ce^{2x\sqrt{x}}.$$

$$2210. y = Ce^{\arcsin x}.$$

$$2211. x^2 + y^2 = \ln Cx^2.$$

$$2212. x = \frac{Cy}{\sqrt{1 + y^2}}.$$

$$2213. \operatorname{arctg}(x + y) = x + C, \text{ взяти } x + y = u(x).$$

$$2215. y = \operatorname{tg}(\ln |x|).$$

$$2216. y = e^{x^2 - 1} - 1.$$

$$2217. y = x + \sqrt{x^2 + 1}.$$

$$2218. y = 2(1 + x^2).$$

$$2219. y = \sin x.$$

$$2220. \sqrt{y} = x \ln x - x + 1.$$

$$2221. y = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x + \sqrt{1+x^2}}.$$

$$2223. y + x = \ln|(x+1)(y+1)|.$$

$$2225. 1 + y^2 = \frac{2}{1-x^2}.$$

$$2228. y = Cx^2.$$

$$2230. y = \frac{2x}{1-Cx^2}.$$

$$2232. y = \frac{x}{1-\ln|2|}.$$

$$2234. y = \frac{x}{2-x}.$$

$$2236. y = \frac{x^2-1}{2}.$$

$$2238. y = \frac{1-x^2}{2}.$$

$$2240. \sqrt{\frac{y}{x}} + x = 1.$$

$$2242. \operatorname{ctg} \ln \sqrt{\left| \frac{y}{x} \right|} = \ln |Cx|.$$

$$2244. (x+y-1)^3 = C(x-y+3).$$

$$2247. y = x + Cx^{-1}.$$

$$2249. y = x \ln |x|.$$

$$2251. y = 3 \left( 1 - 3e^{-\frac{1}{x}} \right)$$

$$2253. y = 1 + \frac{\ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right|}{\cos x} + \frac{C}{\cos x}.$$

$$2255. y = \frac{1}{2} \left( x \sqrt{1-x^2} + \arcsin x \right) \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$$

$$2222. y = e^{\operatorname{ctg} \frac{x}{2}}.$$

$$2224. \ln 2 + \frac{y^2}{x^2} = \frac{1}{2} + \ln(1+e^x).$$

$$2227. y = x(\ln|x| + C).$$

$$2229. y = \pm x \sqrt{C \ln|x| - 1}.$$

$$2231. y = x^2 - 2x.$$

$$2233. y = x \operatorname{arctg} x^2.$$

$$2235. y = x \arcsin \frac{\sqrt{2}x}{2}.$$

$$2237. \sin \frac{y}{x} + \ln x = 1.$$

$$2239. y = xe^{-\frac{x}{2}}.$$

$$2241. y = x \arcsin x.$$

$$2243. y = -x \ln |\ln x - 1|.$$

$$2245. 3x + y + 2 \ln |x + y - 1| = C.$$

$$2248. y = \frac{1}{2} + Cx^{-2}.$$

$$2250. y = \frac{\ln|x|}{x^3}.$$

$$2252. y = \frac{x}{\cos x}.$$

$$2254. y = \frac{x^2}{\sin x}.$$

$$2256. y = \frac{x^3}{3+x}.$$

$$2258. y = e^{2x}(x+C).$$

$$2260. y = \frac{\sec x}{4}(2x + \sin 2x + 4C).$$

$$2262. y = \frac{x^2}{2}e^x.$$

$$2264. y = \frac{1}{C - x \ln|x|}.$$

$$2267. y = Ce^{-2x} + 2x - 1.$$

$$2269. y = x^2(Ce^{x^{-1}} + 1).$$

$$2271. y = Ce^{-x} + \frac{1}{2}(\cos x + \sin x).$$

$$2273. y = Ce^{2y} + \frac{1}{4}(2y^2 + 2y + 1).$$

$$2275. y = e^x \left( \ln|x| + \frac{x^2}{2} \right) + Ce^x.$$

$$2277. y^2 = x \ln \frac{C}{x}.$$

$$2280. \frac{x^2}{2} + xy + y^2 = C.$$

$$2282. \frac{x^4}{4} - \frac{3}{2}x^2y^2 + 2x + \frac{y^2}{3} = C.$$

$$2284. x^2 - y^2 = Cy^3.$$

$$2286. x^3e^y - y = C.$$

$$2288. x^2 \cos^2 y + y^2 = C.$$

$$2290. x^2 \cos 2y + 2x = C.$$

$$2292. x + \arctg \frac{y}{x} = C.$$

$$2294. x^y = C.$$

$$2257. y = \frac{1}{3}e^x + Ce^{-2x}.$$

$$2259. y = \frac{1}{32}(8x^2 + 12x - 3) + Ce^{-4x}.$$

$$2261. y = Cx^2 + x^2 \ln|x|.$$

$$2263. y = -x \operatorname{ctg} x + 1 + \frac{C}{\sin x}.$$

$$2265. y = \pm \sqrt{\frac{C}{x} - \frac{x^2}{3}}.$$

$$2268. y = e^{-x^2} \left( C + \frac{x^2}{2} \right)$$

$$2270. y = (x+C)(x^2+1).$$

$$2272. y^2 - 2x^2 = Cy^3.$$

$$2274. x = y \ln y + \frac{C}{y}.$$

$$2276. y = \frac{x}{x+1}(x-1+\ln|x|).$$

$$2278. x = y^3(3 + Ce^{\cos x}).$$

$$2281. \frac{x^3}{3} + xy^2 + x^2 = C.$$

$$2283. x^2 + y^2 - 2\arctg \frac{y}{x} = C.$$

$$2285. 4x^2 + y^2 = Cx.$$

$$2287. y + xe^{-y} = C.$$

$$2289. x^2 + 2xy - 3y = C.$$

$$2291. x^4 - x^2y^2 + y^4 = C.$$

$$2293. xe^y - y^2 = C.$$

$$2295. 2\sqrt{(x^2 + y^2)^3} + 6x - 3y^2 = C.$$

$$2296. \ln|x| + \operatorname{tg} xy + y^2 + C.$$

$$2298. \frac{x^2}{2} + ye^{\frac{x}{y}} = 2.$$

$$2300. y = \frac{x}{x^2 + C}.$$

$$2302. y = 2x + C\sqrt{1-x^2}.$$

$$2304. \frac{1}{2}e^{2x} - e^y \operatorname{arctg} y - \frac{1}{2}\ln(y^2 + 1) = C.$$

$$2306. y = Ce^{-\sin x} + \sin x - 1.$$

$$2308. yx = C(y-1).$$

$$2310. y = x.$$

$$2312. y = 0.$$

$$2314. y = \left( \frac{C + \ln|\cos x|}{x} + x \right)^2.$$

$$2316. \sqrt{x^2 + y^2} + \frac{y}{x} = C.$$

$$2318. \ln|1+y| - \frac{y+1}{x} = C.$$

$$2330. y = \frac{x^4}{4} + 1.$$

$$2332. y = e^{2x}.$$

$$2334. y = \frac{x^2}{2} + C_1 \ln|x| + C_2.$$

$$2336. y = x + C_1 \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C_2.$$

$$2338. y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}.$$

$$2340. y = e^{-x}(C_1 + C_2 x).$$

$$2297. 3^{xy} - 3y = 1.$$

$$2299. x = ye^{Cy+1}.$$

$$2301. xy \left( C - \frac{1}{2} \ln^2 x \right) = 1.$$

$$2303. 3y + \ln \frac{|x^3 - 1|}{(y+1)^6} = C.$$

$$2305. y = x^2 \left( 1 + Ce^{\frac{1}{x}} \right).$$

$$2307. \sqrt{\frac{y}{x}} + \ln|x| = C.$$

$$2309. 10e^x y + y^5 - 5x = C.$$

$$2311. (x-C)^2 + y^2 = C^2.$$

$$2313. y = \frac{\operatorname{tg} x + \sec x}{C + \sin x}.$$

$$2315. y = x^4 \ln^2 \sqrt{|Cx|}.$$

$$2317. x^2 - xy + y^2 + x - y = C.$$

$$2329. y = 1 - \cos x.$$

$$2331. y = -x \sin x - 2 \cos x + C_1 x + C_2.$$

$$2333. y = -\frac{x^2}{2} - x + C_1 e^x + C_2.$$

$$2335. y = \ln|x| - \frac{C_1}{x} + C_2.$$

$$2337. y = x - 1.$$

$$2339. y = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

$$2341. y = -\frac{1}{x}.$$

$$2342. y = \frac{2}{e^x + e^{-x}}.$$

$$2343. y = -\sin x + \frac{1}{6}x^3 + C_1x + C_2.$$

$$2344. y = \frac{1}{8}e^{2x} + \frac{1}{120}x^6 + \frac{1}{2}C_1x^2 + C_2x + C_3.$$

$$2345. y = (x^2 - x + 1)e^x + C_1x + C_2.$$

$$2346. x = t^3 - 2t; y = \frac{9}{28}t^7 - \frac{9}{10}t^5 + \frac{2}{3} + C_1x + C_2.$$

$$2347. y = \frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{9}x^3 + \frac{1}{2}C_1x^2 + C_2x + C_3.$$

$$2348. y = \ln|e^{2x} + C_1| - x + C_2.$$

$$2349. y \cos^2(x + C_1) = C_2.$$

$$2350. y = (C_1x - C_1^2)e^{\frac{1+x}{C_1}} + C_2.$$

$$2351. y = \frac{1}{2}\ln^2|x| + C_1\ln|x| + C_2.$$

$$2352. y = \sin(C_1 + x) + C_2x + C_3.$$

$$2353. (C_1x + C_2)(1 - y) = 1.$$

$$2354. y = \frac{1}{5}\sqrt{(1-x^2)^5} - \frac{1}{3}\sqrt{(1-x^2)^3} + \frac{1}{4}C_1x^4 + C_2.$$

$$2355. y = C_2\left(xe^{C_2x} - \frac{1}{C_1}e^{C_1x}\right) + C_3.$$

$$2356. y = -\sin x - C_1 \cos x + C_2x + C_3.$$

$$2357. y = x^2 + 3x + 1.$$

$$2358. y = \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{6}x^3.$$

$$2359. y = 2x.$$

$$2360. y = \frac{1}{5}(9 - x^2)^{\frac{5}{2}} - 3(9 - x^2)^{\frac{3}{2}}.$$

$$2361. y = x.$$

$$2362. y = 2 \sin x + 2.$$

2380, 2381, 2382 — лінійно незалежні системи.

2383, 2384 — лінійно залежні системи.

$$2386. y = C_1 \sin x + C_2x.$$

$$2387. y = C_1 \cos x + C_2 \cos^2 x.$$

$$2388. y = C_1x + C_2 \ln|x|.$$

$$2389. y = \frac{C_1}{x} + C_2x^2.$$

$$2390. y = C_1x^2 + C_2e^x.$$

$$2391. y = C_1e^{-2x} + C_2(4x^2 + 1).$$

2392.

$$y = C_1 \frac{x}{1-x} + C_2 \frac{2x \ln|x| + 1 - x^2}{1-x}.$$

$$2393. y = C_1x^3 + C_2 \frac{1}{x^2}.$$

$$2394. y = C_1 \frac{\sin x}{x} + C_2 \frac{\cos x}{x}.$$

$$2408. y = C_1e^x + C_2e^{2x}.$$

$$2409. y = C_1e^x + C_2e^{-x}.$$

$$2410. y = C_1e^{-x} + C_2e^{3x}.$$

$$2411. y = C_1e^{-x} + C_2e^{2x}.$$

$$2412. y = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x}.$$

$$2413. y = C_1e^{3x} + C_2e^{-3x}.$$

$$2414. y = C_1e^{-x} + C_2e^{-5x}.$$

$$2415. y = C_1e^{-x} + C_2e^{-4x}.$$

$$2416. y = C_1e^{(-1+\sqrt{3})x} + C_2e^{(-1-\sqrt{3})x}.$$

$$2417. y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}.$$

$$2419. y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{x/2}.$$

$$2421. y = C_1 e^{x/3} + C_2 e^{-2x}.$$

$$2423. y = e^{-2x} (C_1 + C_2 x).$$

$$2425. y = e^{1.5x} (C_1 + C_2 x).$$

$$2427. y = e^{-x/2} (C_1 + C_2 x).$$

$$2429. y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x.$$

$$2431. y = e^{-\frac{x}{2}} \left( C_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + C_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \right).$$

$$2432. y = e^{-x} (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x).$$

$$2434. y = \sin x.$$

$$2436. y = x e^x.$$

$$2438. y = e^{-x/2} \left( \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x - \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \right).$$

$$2440. y = e^{-2x} (\cos 2x + i \sin 2x).$$

$$2442. y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + C_3 e^{3x} + C_4 e^{-3x}.$$

$$2443. y = (C_1 + C_2 x) e^{2x} + (C_3 + C_4 x) e^{-2x}.$$

$$2444. y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x} + C_3 e^{4x}.$$

$$2454. y = x^2 + x + 1.$$

$$2456. y = x^2 + 2x.$$

$$2458. y = x^2.$$

$$2461. y = x^2 + 2x + 1.$$

$$2464. y = A e^{-3x}.$$

$$2466. y = (Ax + B) e^{-5x}.$$

$$2468. y = (Ax + B) e^{4x}.$$

$$2470. y = x^2 (Ax + B) e^{4x}.$$

$$2472. y = x^2 - 2x + 2 + C_1 e^x + C_2 e^{-x}.$$

$$2418. y = C_1 e^{-x/2} + C_2 e^{-2x}.$$

$$2420. y = C_1 e^{-x/2} + C_2 e^{-2x/3}.$$

$$2422. y = e^x (C_1 + C_2 x).$$

$$2424. y = e^{-x} (C_1 + C_2 x).$$

$$2426. y = e^{-3x} (C_1 + C_2 x).$$

$$2428. y = e^{-4x} (C_1 + C_2 x).$$

$$2430. y = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

$$2433. y = e^x (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x).$$

$$2435. y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

$$2437. y = e^{2x} - e^{-x}.$$

$$2439. y = \cos 2x + \sin 2x.$$

$$2441. y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x + C_3.$$

$$2445. y = C_1 + C_2 x + C_3 e^{-x} + C_4 e^{-x}.$$

$$2455. y = 2x - 3.$$

$$2457. y = x^3 - 3x^2.$$

$$2459. y = \frac{x^4}{12}.$$

$$2462. y = A e^{-3x}.$$

$$2460. y = x^3.$$

$$2463. y = A x^{2x} e^{-5x}.$$

$$2465. y = (Ax + B) \sin 2x + (Bx + C) \cos 2x.$$

$$2467. y = A e^{2x} + B x^2 + C x + D.$$

$$2469. y = ((Ax + B) e^{4x} + (Cx + D) \cos 4x).$$

$$2471. y = 2x^2 - 1 + C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x.$$

$$2473. y = x^2 + 2x + C_1 + C_2 e^{-2x}.$$

2474.  $y = \frac{x^2}{2} - x + C_1 + C_2 e^{-x}$ .      2475.  $y = \frac{x^3}{6} + C_1 + C_2 x$ .
2476.  $y = 2x + C_1 e^x + C_2 e^{2x}$ .      2477.  $y = x^2 + e^{-x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$ .
2478.  $y = x^2 + 2x + C_1 e^{-x} C_2 x e^{-x}$ .      2479.  $y = x e^x + C_1 + C_2 e^{-x}$ .
2480.  $y = e^x x^2 + C_1 e^x + C_2 e^{-x}$ .      2481.  $y = \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}$ .
2482.  $y = x^3 + 3x^2 + (C_1 + C_2 x) e^{-x}$ .      2483.  $y = x^2 + e^x(x + C_1 + C_2 e^x)$ .
2484.  $y = e^{2x}((x^3 + x^2) + C_1 + C_2 x)$ .      2485.  $y = 1 - 2x + C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$ .
2486.  $y = 2 \cos x + C_1 \cos \sqrt{2}x + C_2 \sin \sqrt{2}x$ .
2487.  $y = -\cos x - \sin x + C_1 e^x + C_2 e^{-x}$ .
2488.  $y = \cos 2x + e^x(C_1 + C_2 x)$ .
2489.  $y = -\frac{x}{2} \cos x + C_1 \cos x + C_2 \sin x$ .
2490.  $y = \frac{1}{4} x \sin 2x + C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$ .
2491.  $y = e^x \sin x + C_1 e^{-x} + C_2$ .      2492.  $y = e^x \sin 2x + C_1 \sin x + C_2 \cos x$ .
2493.  $y = e^{2x} \sin x + C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$ .
2494.  $y = e^{-x}(x(\cos x + \sin x) + C_1 \cos x + C_2 \sin x)$ .
2495.  $y = e^x(x(\cos x + \sin x) + C_1 \cos x + C_2 \sin x)$ .
2500.  $y = \sin x \ln \left| \operatorname{tg} \left( \frac{x}{2} \right) \right| + C_1 \cos x + C_2 \sin x$ .
2501.  $y = \ln |\sin x| \sin x - 2x \cos x + C_1 \cos x + C_2 \sin x$ .
2502.  $y = x - (1 + e^{-x}) \ln(1 + e^x) + C_1 + C_2 e^{-x}$ .
2503.  $y = e^{-2x} \left( x^2 \left( \frac{\ln x}{2} - \frac{3}{4} \right) + C_1 + C_2 x \right)$ .
2504.  $y = (C_1 + \ln |\sin x|) \cos 2x + \left( C_2 - x - \frac{1}{2} \operatorname{ctg} x \right) \sin 2x$ .
2505.  $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \cos x + \sin x \ln |\sin x|$ .
2506.  $y = \left[ -\frac{1}{2} e^x + \left( \frac{1}{2} \ln(e^x + 1) + C_1 \right) e^{-x} + \left( \frac{1}{2} \ln \frac{e^x}{e^x + 1} + C_2 \right) e^x \right]$ .
2507.  $y = e^{-x}((\ln |\cos x| + C_1) \cos x + (x + C_2) \sin x)$ .

2508.  $y = e^x(C_1 - \ln x + C_2x - 1)$ .      2509.  $y = \left(C_1 + C_2x + \frac{1}{2x}\right)e^{-2x}$ .
2510.  $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \cos x \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + 2$ .      2511.  $y = C_1 + C_2 e^x - \sin e^x$ .
2512.  $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \cos x \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| - 2$ .
2513.  $y = \left(C_1 - \frac{1}{2 \cos^2 x}\right) \cos x + (C_2 + \operatorname{tg} x) \sin x$ .
2514.  $y = \left(C_1 + C_2x + \frac{1}{2}x \ln |x| - \frac{3}{4}x^2\right)e^{-2x}$ .      2515.  $y = x^3 + C_1x^2 + C_2$ .
2516.  $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 e^{2x} + \frac{1}{12}(4xe^{2x} + e^x - 2) + \frac{1}{6}(e^{-x} - 3e^x - 2e^{2x}) \ln(e^x + 1)$ .
2517.  $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \sin x + C_4 \cos x + \frac{x^2 - 3x}{8}e^x - \frac{1}{4}x \sin x$ .
2521. 0.      2523. в).      2524. б).      2525. а), б), г).
2526. г).
2528. а) збіжним; б) збіжним або розбіжним; в) розбіжним.
2529. а), б), д).      2530. а), б).
2531.  $u_1 = -\frac{1}{2}; u_2 = \frac{1}{6}; u_3 = -\frac{1}{12}; u_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^2 + n + 1}$ .
2533.  $u_1 = 1; u_2 = \frac{2}{3}; u_3 = \frac{3}{11}; u_{n+1} = \frac{n! + 1}{(n+1)^n + n!}$ .
2535.  $u_1 = 2; u_2 = 1; u_3 = \frac{1}{2}; u_{n+1} = 1 - \cos \frac{\pi}{n+1}$ .
2537.  $u_1 = -\frac{1}{2}; u_2 = -\frac{1}{2}; u_3 = \frac{3}{8}; u_{n+1} = \frac{(-1)^{\frac{n^2 + 3n + 3}{2}}}{2^{n+1}}$ .
2538.  $u_n = \frac{1}{2n-1}$ , виконується.      2539.  $u_n = \frac{1}{2n}$ , виконується.
2540.  $u_n = \frac{1}{2n+1}$ , виконується.      2541.  $u_n = \frac{2+3n}{2^n}$ , виконується.
2542.  $u_n = (-1)^{n-1}$ , не виконується.
2543.  $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$ , виконується.
2544.  $u_n = (-1)^{n+1} n^{(-1)^{n+1}}$ , не виконується.

2545.  $u_n = \frac{\cos(n\alpha)}{n}$ , виконується.

2547. Не виконується, ряд розбіжний.

2549. Не виконується, ряд розбіжний.

2550. Виконується.

2552. Виконується.

2554. Виконується.

2556. Виконується.

2559. Збіжний.  $S = 1$ .

2561. Збіжний.  $S = \frac{11}{18}$ .

2563. Збіжний.  $S = 0,125$ .

2565. Збіжний.  $S = \frac{2}{3}$ .

2567. Збіжний.  $S = 1 - \sqrt{2}$ .

2569. Збіжний.  $S_n = \arctg \frac{n}{n+1}$ ;  $S = \frac{\pi}{4}$ .

2575. б).

2576. д).

2577. б).

2578. а), є) — Даламбера; б), г), з) — інтегральною Коші; б), є), ж), з) — порівняння; д) — радикальною Коші.

2581. Розбіжний.

2583. Розбіжний.

2585. Розбіжний.

2587. Збіжний.

2589. Розбіжний.

2591. Збіжний.

2593. Збіжний.

2595. Збіжний.

2597. Розбіжний.

2599. Збіжний.

2602. Збіжний.

2604. Збіжний.

2606. Розбіжний.

2607. Ознака Даламбера відповіді про збіжність ряду не дає.

2608. Збіжний.

2609. Ознака Даламбера відповіді про збіжність ряду не дає.

2610. Збіжний.

2612. Ознака Даламбера відповіді про збіжність ряду не дає.

2613. Розбіжний.

2615. Збіжний.

2617. Збіжний.

2620. Збіжний.

2546.  $u_n = \arcsin \frac{1}{n}$ , виконується.

2548. Виконується.

2551. Виконується.

2553. Не виконується, ряд розбіжний.

2555. Не виконується, ряд розбіжний.

2557. Виконується.

2560. Збіжний.  $S = 0,5$ .

2562. Збіжний.  $S = 1$ .

2564. Збіжний.  $S = 1,5$ .

2566. Розбіжний.

2568. Збіжний.  $S = \frac{23}{90}$ .

2582. Збіжний.

2584. Збіжний.

2586. Розбіжний.

2588. Збіжний.

2590. Розбіжний.

2592. Збіжний.

2594. Збіжний.

2596. Розбіжний.

2598. Збіжний.

2600. Розбіжний.

2603. Збіжний.

2605. Збіжний.

2622. Розбіжний.
2623. Радикальна ознака Коші відповіді про збіжність ряду не дає.
2624. Збіжний.
2625. Збіжний.
2626. Збіжний.
2627. Збіжний.
2628. Розбіжний.
2629. Радикальна ознака Коші відповіді про збіжність ряду не дає.
2630. Збіжний.
2632. Розбіжний.
2633. Збіжний.
2634. Збіжний.
2635. Збіжний.
2636. Збіжний.
2637. Збіжний.
2638. Розбіжний.
2639. Збіжний.
2640. Збіжний.
2641. Збіжний.
2642. Розбіжний.
2643. Розбіжний.
2644. Збіжний.
2645. Розбіжний.
2646. Збіжний.
2647. Збіжний.
2648. Збіжний.
2649. Збіжний.
2650. Розбіжний.
2651. Розбіжний.
2652. Збіжний.
2653. Збіжний.
2654. Збіжний.
2655. Розбіжний.
2656. Розбіжний.
2657. Розбіжний.
2658. Розбіжний.
2659. Збіжний.
2660. Збіжний.
2661. Розбіжний.
2662. Розбіжний.
2663. Збіжний.
2664. Розбіжний.
2665. Збіжний.
2666. Збіжний.
2667. Збіжний.
2668. Збіжний.
2669. Збіжний.
2670. Збіжний.
2671. Збіжний.
2672. Збіжний.
2673. Розбіжний.
2674. Розбіжний.
2687. Збіжний.
2688. Збіжний.
2689. Розбіжний.
2690. Збіжний.
2691. Розбіжний.
2692. Збіжний.
2693. Збіжний.
2694. Збіжний.
2695. Збіжний.
2698. Умовно збіжний.
2699. Абсолютно збіжний.
2700. Умовно збіжний.
2701. Розбіжний.
2702. Абсолютно збіжний.
2703. Абсолютно збіжний.
2704. Абсолютно збіжний.
2705. Абсолютно збіжний.
2706. Абсолютно збіжний.
2707. Умовно збіжний.
2708. Абсолютно збіжний.
2709. Розбіжний.
2710. Абсолютно збіжний.
2711. Абсолютно збіжний.
2712. Умовно збіжний.
2713. Розбіжний.
2714. Розбіжний.

2715. Абсолютно збіжний.

2716. Розбіжний.

2717. Абсолютно збіжний.

$$2718. |\varepsilon| < \frac{1}{720}.$$

2720. 5.

2721. 8.

2722. 9.

2723. 3.

2724. 2.

2725. 4.

2726. 99.

2729. г).

2733. а).

2736. а), б), д), е), є).

2737. в).

2740.  $(0; +\infty)$ .

2741.  $(-1; 1)$ .

$$2742. \left( \frac{1}{e}; e \right).$$

2743.  $(-1; 1)$ .

2744.  $[-1; 1]$ .

2745.  $(-1; 1)$ .

2746.  $(1; +\infty)$ .

2747.  $(0; +\infty)$ .

2748.  $(0; +\infty)$ .

2749. Розбіжний.

2750.  $(1; +\infty)$ .

2751.  $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ .

2752.  $(-\infty; +\infty)$ .

2753.  $(-\infty; -1] \cup (1; +\infty)$ .

2754.  $(-\infty; -1] \cup (1; +\infty)$

$$2755. \left( -\infty; \frac{14}{3} \right) \cup \left( \frac{16}{3}; +\infty \right)$$

2756.  $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$ .

$$2757. \left( -1; -\frac{1}{2} \right).$$

2758.  $(-\infty; +\infty)$ .

2759.  $(-\sqrt{e-1}; \sqrt{e-1})$ .

$$2760. \left( -\frac{1}{5}; \frac{1}{5} \right).$$

2761.  $(-2; 2)$ .

2762.  $[-3; 3]$ .

2763.  $[-5; 5]$ .

2764.  $[-5; 5]$ .

$$2765. \left[ -\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2} \right].$$

$$2766. \left( -\frac{\sqrt{2}}{3}; \frac{\sqrt{2}}{3} \right).$$

$$2767. \left( -\frac{7}{2}; \frac{7}{2} \right).$$

$$2768. \left( -\frac{6}{7}; \frac{6}{7} \right).$$

$$2769. \left( -\frac{4}{5}; \frac{4}{5} \right).$$

$$2770. \left( -\frac{\sqrt{5}}{2}; \frac{\sqrt{5}}{2} \right).$$

$$2771. [-\sqrt{3}; \sqrt{3}].$$

2772.  $[-0,1; 0,1]$ .

2773.  $[-1; 1]$ .

2774.  $[-5; 3]$ .

2775.  $(1; 2]$ .

2776.  $[-1; 3]$ .

2777.  $[-1; 0]$ .

2778.  $(-1; 1)$ .

2779.  $(-1; 1]$ .

$$2780. \left[ -\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}} \right].$$

2781.  $(-1; 1)$ .

2782.  $(-\infty; +\infty)$ .

2783.  $x = 0$ .

2784.  $(-\infty; +\infty)$ .

2785.  $(-4; 4)$ .

$$2786. \left( -\frac{1}{3}; \frac{1}{3} \right)$$

2787.  $(-2; 2)$ .

2788.  $[-3; 3]$ .

2789.  $(-1; 1)$ .

2790.  $(-1; 1)$ .

2791.  $[-1; 1]$ .

2792.  $[-1; 1]$ .

2793.  $(-e-3; e-3)$ .

2794.  $(-2; 4)$ .

2795.  $(2; 4)$ .

2796.  $(-7; -3)$ .

2797.  $[-3; -1]$ .                      2798.  $[-4; -2]$ .                      2799.  $\left(\frac{e-1}{e}; \frac{e+1}{e}\right)$ .
2800.  $x = -3$ .                      2801.  $(-2; 0)$ .                      2802.  $(-e; e)$ .
2803.  $(1; 3]$ .                      2804.  $\left(-\frac{5}{4}; \frac{13}{4}\right)$ .                      2805.  $[1; 5)$ .
2807.  $\ln(x+1)$ ,  $x \in (-1; 1]$ .                      2808.  $\frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{1-x}$ ,  $x \in (-1; 1)$ .
2809.  $\arctg x$ ,  $x \in [-1; 1]$ .                      2810.  $\frac{1}{(x-1)^2}$ ,  $x \in (-1; 1)$ .
2811.  $\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$ ,  $x \in (-1; 1)$ .                      2812.  $\frac{2}{(1-x)^3}$ ,  $x \in (-1; 1)$ .
2816. Достатні: а), б); необхідні: а), в).                      2817.  $-\sum_{n=0}^{\infty} (n+3)x^n$ ,  $x \in (-1; 1)$ .
2818.  $-\sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{2}{3^{n+1}}\right) x^n$ ,  $x \in (-1; 1)$ .
2819.  $x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 2^{n-1} x^n}{(n-1)!}$ ,  $x \in (-\infty; +\infty)$ .                      2820.  $1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!}$ ,  $x \in (-\infty; +\infty)$ .
2821.  $1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n} x^{2n}}{(2n)!}$ ,  $x \in (-\infty; +\infty)$ .
2822.  $1 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2x)^{2n}}{(2n)!}$ ,  $x \in (-\infty; +\infty)$ .
2823.  $2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(n+2) 3^{2n} x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ ,  $x \in (-\infty; +\infty)$ .
2824.  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{9^{n+1}}$ ,  $x \in (-3; 3)$ .
2825.  $\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1) x^{2n}}{2^n n! 2^{2n+1}}$ ,  $x \in (-2; 2)$ .
2826.  $2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ ,  $x \in (-1; 1)$ .                      2827.  $x + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{(n-1)^n}$ ,  $x \in [-1; 1]$ .
2828.  $x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1) x^{2n+1}}{2^n (n-1)! (2n+1)}$ ,  $x \in (-1; 1)$ .
2829.  $x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1) x^{2n+1}}{2^n n! (2n+1)}$ ,  $x \in [-1; 1]$ .

$$2830. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{4n-3} x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in (-\infty; +\infty).$$

$$2831. 1 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n-1}{n!} x^n, \quad x \in (-\infty; +\infty).$$

$$2832. 8 + 3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + 2^n + 3^{n-1}}{n!} x^n, \quad x \in (-\infty; +\infty).$$

$$2833. 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (3n-4) x^n}{2^{3n-1} \cdot 3^n \cdot n!}, \quad x \in (-\infty; +\infty).$$

$$2834. \frac{1}{6} - \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{3^{n+1}} \right) x^n, \quad x \in (-2; 2).$$

$$2835. \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}, \quad x \in (-\infty; +\infty).$$

$$2836. x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!}, \quad x \in (-\infty; +\infty).$$

$$2837. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n^2}, \quad x \in [-1; 1].$$

$$2838. x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!}, \quad x \in (-\infty; +\infty).$$

$$2839. x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \dots$$

$$2840. e \left( 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{6} - \dots \right).$$

$$2841. - \left( \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{12} + \frac{x^6}{45} + \dots \right).$$

$$2842. x + x^2 + \frac{x^3}{3} + \dots$$

$$2843. \text{a) } -31 + 26(x+2) - 8(x+2)^2 + (x+2)^3; \quad \text{б) } 55 - 99(x+2) + 48(x+2)^2 - \\ - 14(x+2)^3 + (x+2)^4; \quad \text{в) } \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x+2)^{2n}}{3^{n+1}}, \quad x \in (-2 - \sqrt{3}; -2 + \sqrt{3}); \quad \text{г) } e^{-2} \times$$

$$\times \left( 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n!} \right), \quad x \in (-\infty; +\infty).$$

$$2844. \text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-1)^n}{n}, \quad x \in (0; 2]; \quad \text{б) } \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x-1)^n, \quad x \in (0; 2); \quad \text{в) } 1 + \frac{3}{2} \times$$

$$\times \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-5)(x-1)^n}{2^{n-1} n!}, \quad x \in (-\infty; +\infty); \quad \text{г) } 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \dots}{3^n n!} \times$$

$$\times \frac{(3n-4)(x-1)^n}{3^n n!}, \quad x \in (-\infty; +\infty).$$

$$2845. 2 + \frac{x-4}{2^2} + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-3)(x-4)^n}{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \dots \cdot 2n 2^{2n}}, \quad x \in [0; 8].$$

$$2846. \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4^{n-1} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^{2n-1}}{(2n-1)!}, \quad x \in (-\infty; +\infty).$$

$$2847. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^{2n-1}}{(2n-1)!}, \quad x \in (-\infty; +\infty).$$

2849. Два.

2852. 999.

2855. 3,107.

2858. 2,001.

2861. 1,005.

2864. 0,487.

2867. 0,497.

2870. 0,2624.

2873. 0,9848.

2876. 0,4931.

2879. 0,6449.

2882.  $\frac{1}{6}$ .

2885.  $\frac{1}{2}$ .

2850. Два.

2853. 2,087.

2856. 4,121.

2859. 7,389.

2862. 0,026.

2865. 0,098.

2868. 32,831.

2871. 0,3679.

2874. 0,4636.

2877. 0,7468.

2880.  $\frac{1}{4}$ .

2883.  $\frac{4}{3}$ .

2886.  $\frac{2}{3}$ .

2851. Бiм.

2854. 1,000.

2857. 7,937.

2860. 1,649.

2863. 0,621.

2866. 0,232.

2869. 0,511.

2872. 0,0175.

2875. 0,9986.

2878. 0,2505.

2881. 1.

2884.  $\frac{1}{3}$ .

2887.  $\frac{1}{60}$ .

|                                                                                                           |            |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| Передмова . . . . .                                                                                       | 3          |
| <b>1. Лінійна алгебра . . . . .</b>                                                                       | <b>5</b>   |
| 1.1. Визначники . . . . .                                                                                 | 5          |
| 1.2. Правило Крамера . . . . .                                                                            | 11         |
| 1.3. Матриці, дії над матрицями. Обернена матриця . . . . .                                               | 12         |
| 1.4. Розв'язання систем лінійних рівнянь у загальному<br>випадку . . . . .                                | 16         |
| 1.5. $N$ -вимірний векторний простір . . . . .                                                            | 24         |
| 1.6. Лінійні перетворення векторного простору. Власні числа<br>і вектори лінійного перетворення . . . . . | 31         |
| 1.7. Квадратичні форми . . . . .                                                                          | 36         |
| <b>2. Векторна алгебра і аналітична геометрія . . . . .</b>                                               | <b>43</b>  |
| 2.1. Вектори, лінійні операції над векторами . . . . .                                                    | 43         |
| 2.2. Скалярний, векторний і мішаний добутки векторів . . . . .                                            | 45         |
| 2.3. Елементарні задачі аналітичної геометрії . . . . .                                                   | 50         |
| 2.4. Пряма лінія на площині . . . . .                                                                     | 53         |
| 2.5. Криві другого порядку . . . . .                                                                      | 58         |
| 2.6. Площина і пряма у просторі . . . . .                                                                 | 63         |
| 2.7. Поверхні другого порядку . . . . .                                                                   | 71         |
| <b>3. Диференціальне числення функції однієї змінної . . . . .</b>                                        | <b>73</b>  |
| 3.1. Функції . . . . .                                                                                    | 73         |
| 3.2. Границя послідовності і функції . . . . .                                                            | 75         |
| 3.3. Неперервність функції . . . . .                                                                      | 83         |
| 3.4. Похідна і диференціал функції . . . . .                                                              | 89         |
| 3.5. Застосування похідної . . . . .                                                                      | 101        |
| <b>4. Функції багатьох змінних . . . . .</b>                                                              | <b>113</b> |
| 4.1. Функція багатьох змінних, її границя та неперервність . . . . .                                      | 113        |
| 4.2. Похідні та диференціали функцій багатьох змінних . . . . .                                           | 119        |
| 4.3. Екстремуми функції багатьох змінних . . . . .                                                        | 128        |

|                                                                                                                                                          |     |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <b>5. Інтегральне числення</b> . . . . .                                                                                                                 | 133 |
| 5.1. Невизначений інтеграл. Найпростіші методи інтегрування . . . . .                                                                                    | 133 |
| 5.2. Метод підстановки та інтегрування частинами у невизначеному інтегралі . . . . .                                                                     | 138 |
| 5.3. Інтегрування раціональних, тригонометричних та ірраціональних функцій . . . . .                                                                     | 143 |
| 5.4. Визначений інтеграл. Невластиві інтеграли . . . . .                                                                                                 | 150 |
| 5.5. Кратні інтеграли . . . . .                                                                                                                          | 157 |
| 5.6. Застосування інтегралів у геометрії . . . . .                                                                                                       | 162 |
| <b>6. Диференціальні рівняння</b> . . . . .                                                                                                              | 167 |
| 6.1. Загальні поняття . . . . .                                                                                                                          | 167 |
| 6.2. Диференціальні рівняння першого порядку . . . . .                                                                                                   | 172 |
| 6.3. Диференціальні рівняння другого та вищих порядків . . . . .                                                                                         | 183 |
| 6.4. Загальні поняття лінійних диференціальних рівнянь другого та вищих порядків . . . . .                                                               | 188 |
| 6.5. Однорідні лінійні диференціальні рівняння другого та вищих порядків зі сталими коефіцієнтами . . . . .                                              | 191 |
| 6.6. Неоднорідні лінійні диференціальні рівняння другого та вищих порядків зі сталими коефіцієнтами, права частина яких має спеціальний вигляд . . . . . | 195 |
| 6.7. Метод варіації довільних сталих . . . . .                                                                                                           | 201 |
| <b>7. Ряди</b> . . . . .                                                                                                                                 | 205 |
| 7.1. Основні поняття числових рядів . . . . .                                                                                                            | 205 |
| 7.2. Знакосталі ряди . . . . .                                                                                                                           | 209 |
| 7.3. Знакозмінні ряди . . . . .                                                                                                                          | 217 |
| 7.4. Функціональні ряди. Степеневі ряди . . . . .                                                                                                        | 222 |
| 7.5. Розвинення функцій у степеневі ряди . . . . .                                                                                                       | 229 |
| <b>Відповіді</b> . . . . .                                                                                                                               | 234 |

---